5 (行) 基本変形と基本行列 の解答例

演習 5.1 (1) 第 1 行と第 3 行を入れ替える. 結果: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 第 3 行を 2 倍する. 結果: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 第 3 行に第 2 行の -2 倍を加える. 結果: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(4) 第 2 行に第 1 行の -2 倍を加える. 結果: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 第 2 行に第 3 行の 7 倍を加える. 結果: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -14 & 21 & -30 & -7 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

演習 5.2 (1) $E_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(2) $E_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(3) $E_{42}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) $E_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5) $E_{42}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかける.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

演習 5.3 A に施した基本変形に対応する基本行列を順番に $Q_1, \ldots, Q_r$ とすると,

$$Q_r \cdots Q_1 A = B.$$

$Q_1, \dots, Q_r$ はすべて正則行列であるから, 左から $Q_r^{-1}, \dots, Q_1^{-1}$ を順番にかけて

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} B$$

を得る. ここで, 正則行列の積は正則行列 (教科書, 定理 1.4) だから, B が正則ならば A も正則である.

演習 5.4 以下はほんの一例です (今日の演習で用いる掃き出し法でやっています). たぶん最短ではないと思います.

$$E_{13}(-2)E_{23}(1)E_{24}(-1)E_4(-1)E_{43}(5)E_{34}(-1)E_{42}(-2)E_{32}(-1)E_2(-1)E_{41}(-4)E_{31}(-3)$$
$$E_{21}(1)E_{12}(1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

つまり次のように基本変形を施す:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$