4 行列のブロック分割／正則行列

演習 4.1 (1) A を $m \times n$ 行列, a を定数とするとき, $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k E_m & ka^{k-1}A \\ O & a^k E_n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5$ を計算せよ.

演習 4.2 A を n 次の正方行列とする. もし $A^2 = A$ ならば, $A = E$ であるか, または A は正則行列ではないことを示せ.

演習 4.3 (1) A を m 次正則行列, B を n 次正則行列, C を $m \times n$ 行列とするとき, $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) A を m 次正則行列, B を n 次正則行列とするとき, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

演習 4.4 次の行列が正則かどうかを判定せよ. また, もし正則行列ならばその逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください (裏面).

演習 4.5 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を平面ベクトル, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. A に対し, $ad - bc$ を A の行列式と呼び, $\det A$ と書く. 以前に演習 2.4 の解答例で確かめたように, 次の (i), (ii), (iii) は同値になる:

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である.
(ii) $\det A = ad - bc \neq 0$.
(iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^2$ を張る.

そこで, 今回は, これらがさらに次の (iv) と同値になることを示せ:

(iv) A は正則行列である.