4 行列のブロック分割／正則行列 の解答例

演習 4.1 (1) k に関する帰納法で示す. $k=1$ の場合は明らか. 以下, $k>1$ のとき, $k-1$ まで証明できたと仮定して k の場合を示す. 仮定により

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k} &= \begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (aE_m)(a^{k-1}E_m)+AO & (aE_m)((k-1)a^{k-2}A)+A(a^{k-1}E_n) \\ O(a^{k-1}E_m)+(aE_m)O & O(((k-1)a^{k-2}A))+(aE_n)(a^{k-1}E_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^kE_m & ka^{k-1}A \\ O & a^kE_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって, k の場合も成り立つ.

(2) $\begin{pmatrix} 32 & 0 & 80 & 240 \\ 0 & 32 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

注意 1. 細かい点ですが, 上記の (1) に出題ミスがありました. $a=0$, $k=1$ のときは, a^{k-1} の部分が 0^0 となって定義できません. だから, 上記の証明においても厳密には $a=0$ の場合を特別扱いする必要があります ($a=0$ の場合はまず $k=2$ の場合を示してから帰納法を用いるなど).

演習 4.2 $A^2=A$ かつ A が正則行列ならば $A=E$ となることを示せば良い. A が正則行列ならば逆行列 A^{-1} が存在するので, $A^2=A$ の両辺に左から (右からでもよい) A^{-1} をかけると,

$$(\text{左辺}) = A^{-1}A^2 = (A^{-1}A)A = EA = A, \quad (\text{右辺}) = A^{-1}A = E.$$

よって, $A=E$ を得る.

演習 4.3 (1) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

演習 4.4 (1) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_{11} + c_{12} = 1 \\ 7c_{11} + 2c_{12} = 0, \end{cases} \begin{cases} 3c_{21} + c_{22} = 0 \\ 7c_{21} + 2c_{22} = 1. \end{cases}$

これは解 $c_{11} = -2$, $c_{12} = 7$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = -3$ をもつ. そこで, $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ が実際逆行列になっているかどうかを確かめてみると,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから, 実際逆行列になっている. よって, 与えられた行列は, 逆行列 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ をもち, 正則であることがわかる.

(2) 逆行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ をもち, 正則である.

(3) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11} + 2c_{12} = 1 \\ 2c_{11} + 4c_{12} = 0, \end{cases} \begin{cases} c_{21} + 2c_{22} = 0 \\ 2c_{21} + 4c_{22} = 1. \end{cases}$

これは解をもたない (例えば, $c_{11} + 2c_{12} = 1$ ならば $2c_{11} + 4c_{12} = 2$ となるはずだから $2c_{11} + 4c_{12} = 0$ は満たさない). よって $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ には逆行列は存在せず, 非正則である.

(4) 正則行列である. 演習 4.3 (1) により,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 16 & -39 \\ 1 & -3 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(5) 正則行列である. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と演習 4.3 (2) により,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

演習 4.5 ((ii) $\Rightarrow$ (iv)) $ad-bc \neq 0$ のとき,

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと, $AB = BA = E$ となり, A に逆行列 $A^{-1} = B$ が存在することが分かる.

((iv) $\Rightarrow$ (iii)) $A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ac_{11}+bc_{21}=1 \\ cc_{11}+dc_{21}=0, \end{cases} \quad \begin{cases} ac_{12}+bc_{22}=0 \\ cc_{12}+dc_{22}=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow c_{11}\boldsymbol{a}+c_{21}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1,\ \ c_{12}\boldsymbol{a}+c_{22}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$ だから, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表わされることが分かり, 従って, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張ることが分かる.

[別証明の例] ((iv) $\Rightarrow$ (ii)) 上記の (ii) $\Rightarrow$ (iv) の証明はそのままでは逆にたどれません. $ad-bc$ が 0 になるかどうかを議論している段階で, いきなり割ってしまっている人が多かったのですが, それでは正しい議論にはなりません. $ad-bc$ で割らずに証明するには, 例えば次のようにします:

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと, $AB = (\det A)E$ となる. ここで $\det A = 0$ であったとすると $AB = O$ となるが, この両辺に左から A^{-1} をかけると $B = O$ となり, $a = b = c = d = 0$ であることになってしまう. これは $A = O$ を意味するが, それでは A が正則行列ではないことになってしまい, 矛盾が生じる. よって $\det A \neq 0$.

((iv) $\Rightarrow$ (i)) $c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ であったとする. 式を行列で書き直すと

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るが, この式の両辺に左から A^{-1} をかけると $c_1 = c_2 = 0$ が分かる. よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である.

注意 2. 高校で 2×2 の行列を習った人で, 「A が正則行列である」ことの定義を「$\det A \neq 0$」と認識している人が結構いたようで, やや混乱が生じてしまったようです. 確かにそのような定義を採用している本もあるのですが, この授業では「逆行列が存在する」ことを正則行列の定義として採用しているので, 注意してください. (一般の正方行列に対する行列式はまだ習っていないと思うので.)

それから, 「$\det A \neq 0$」と「逆行列が存在する」ことが同値であることを既知として証明を書いている人がいましたが, 今回はまさにその部分を証明してくださいという問題なので, 該当する人は残念ながら正答とはなりません.