3 行列の基本演算

演習 3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次を求めよ.

(1) $2A + 3B$ (2) $3A - 2B$ (3) ${}^tA$

演習 3.2 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

演習 3.3 次の等式が成り立つように x, y, z の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & z \end{pmatrix}$$

演習 3.4 A, B を正方行列とする. 行列の結合法則・分配法則を使って, 次の式が成立することを示せ.

(1) $(AB)^2 = (A(BA))B$

(2) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

演習 3.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ とし, E を単位行列とするとき, 次を求めよ.

(1) AE (2) EA (3) AB (4) $A(BC)$ (5) $(A+E)B$ (6) AC

(7) CA (8) $(AC^2)A$ (9) A^2 (10) A^3 (11) $(A(A+E))(BA^2)$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 3.6 A を 3 次の交代行列 (${}^tA = -A$ を満たす 3 次の正方行列) とする. 任意の奇数 $n \geq 0$ に対し, A^n は A のスカラー倍になることを示せ.