3 行列の基本演算 の解答例

演習 3.1 (1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -11 & 8 \\ 16 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

演習 3.2 (1) (15) (2) $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

演習 3.3 $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+6 & xy-2 \\ 5 & -y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6=2 \\ xy-2=-5 \\ -y-3=z. \end{cases}$

これを解いて, $x=-1$, $y=3$, $z=-6$.

演習 3.4 (1) $(AB)^2 = (AB)(AB) = ((AB)A)B = (A(BA))B$.

(2) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

演習 3.5 (1) $AE = A$ (2) $EA = A$ (3) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -22 \\ -3 & 20 \end{pmatrix}$

(5) $(A+E)B = AB + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ (6) $AC = \begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (8) $(AC^2)A = (AC)(CA) = \begin{pmatrix} 86 & -48 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

(9) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (10) $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(11) $(A(A+E))(BA^2) = A(((A+E)B)A^2) = A(EA^2) = AA^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

演習 3.6 A は 3 次の交代行列なので,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる. これに対し A^2, A^3 を具体的に計算してみると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -a(a^2+c^2+b^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ a(a^2+b^2+c^2) & 0 & -c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & c(b^2+a^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)A$$

を得る. よって, とりあえず $n = 1, 3$ の場合は証明できた.

以下, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対し,

$$A^{2m+1} = (-1)^m (a^2+b^2+c^2)^m A$$

となることを数学的帰納法で示す. $m = 0, 1$ の場合は既に示したので, 次に $m > 1$ の場合を考えて, A^{2m-1} については成立したと仮定する. すると,

$$\begin{aligned} A^{2m+1} = A^{2m-1}A^2 &= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}AA^2 = (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}A^3 \\ &= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}(-(a^2+b^2+c^2))A \\ &= (-1)^m(a^2+b^2+c^2)^m A \end{aligned}$$

となり, A^{2m+1} についても成立することが分かる. □