2　一般の数ベクトル

以下で, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{C}$ は複素数全体を表すものとする.

演習 2.1 次で与えられる $\mathbb{R}$ 上の 3 項ベクトルの組が ($\mathbb{R}$ 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 2.2 次で与えられる $\mathbb{C}$ 上の 3 項ベクトルの組が ($\mathbb{C}$ 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

演習 2.3 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. K 上の数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属ならば, ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して, $\boldsymbol{a}_i$ が $\boldsymbol{a}_i$ 以外の他のベクトルたちの線形結合で表せること, すなわち, ある定数 $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in K$ が存在して,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

と表せることを示せ.

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 2.4 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を $\mathbb{R}^2$ の平面ベクトルとするとき, 次の二つの条件が同値であることを証明せよ.

(a) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立である.
(b) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張る.