2　一般の数ベクトル の解答例

演習 2.1 (1) $0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. よって, 線形従属.

(2) $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ 2c_1-c_2+5c_3=0 \\ 3c_1+6c_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-2c_3 \\ c_2=c_3. \end{cases}$

そこで, 例えば $c_3=1$, $c_1=-2c_3=-2$, $c_2=c_3=1$ とすれば,

$$-2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

よって, 線形従属.

(3) $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1-c_2+c_3=0 \\ 3c_1+3c_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=0.$

よって, 線形独立.

(4) $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1-c_2-c_3=0 \\ c_2=0 \\ 2c_1-c_2+c_3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=0$. よって, 線形独立.

演習 2.2 (1) $c_1\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\-1\\-2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-1}c_1+c_2=0 \\ -c_1+c_2=0 \\ -2c_1+2c_2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c_1=c_2=0$. よって, 線形独立.

(2) $\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+\sqrt{-1}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. よって, 線形従属.

(3) $c_1\begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{-1})c_1 + (1-\sqrt{-1})c_2 = 0 \\ \sqrt{-1}c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3 \\ c_2 = 2\sqrt{-1}c_3 \end{cases}$

そこで, 例えば $c_3 = 1$, $c_1 = -2c_3 = -2$, $c_2 = 2\sqrt{-1}c_3 = 2\sqrt{-1}$ とすれば,

$$-2\begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + 2\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, 線形従属.

演習 2.3 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形従属なので, ある定数の組 $b_1, \ldots, b_m \in K$ が存在して,

$$b_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}, \quad (b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0).$$

すると, $(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ だから, ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して $b_i \neq 0$ となる. そこで, $c_j = -\dfrac{b_j}{b_i}$ $(j = 1, \ldots, m,\ j \neq i)$ とおけば, 上記の式により,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m.$$

演習 2.4 (平面ベクトルの幾何的な意味を考えれば直感的には明らかですが, きちんと証明するのはなかなか大変です.)

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおく.

((a) $\Rightarrow$ (b)) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立であるとする. まず, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表すことを考える.

仮定より, $a_1 \neq 0$ または $b_1 \neq 0$ である ($a_1 = b_1 = 0$ のとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立ではありえないので). そこで, 必要ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を入れ替えて $a_1 \neq 0$ であるとしてよい. このとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で $\begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$ の形のベクトルをつくることを考えると,

$$-\frac{b_1}{a_1}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -\dfrac{b_1 a_2}{a_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1} \end{pmatrix}$$

を得る．ここで, もし $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ であったとすると $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であることになってしまうので, $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ が成り立つことがわかる．そこで, $d = a_1b_2 - b_1a_2$ とおいて, 上記の式に a_1/d をかければ,

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{a_1}{d}\boldsymbol{b}$$

を得る．さらに $\boldsymbol{e}_1$ の方も

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{d}\boldsymbol{a} - \frac{a_2}{d}\boldsymbol{b}$$

と表せる．

すると, 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = x_1\left(\frac{b_2}{d}\boldsymbol{a} - \frac{a_2}{d}\boldsymbol{b}\right) + x_2\left(-\frac{b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{a_1}{d}\boldsymbol{b}\right) = \frac{x_1b_2 - x_2b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{-x_1a_2 + x_2a_1}{d}\boldsymbol{b}$$

と表せることがわかる．よって, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^2$ を張る．

((a) $\Leftarrow$ (b)) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張るとする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であったと仮定して矛盾を導くことにする．演習 2.3 により, ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ となる．必要ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を入れ替えて, $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ であったとしてよい．また, このときもし $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とすると $\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{0}$ となって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合が $\boldsymbol{0}$ だけになってしまうので, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ となるはず．よって, a_1, a_2 のうちどちらかは 0 でない．

すると, $a_1 \neq 0$ の場合, $\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合では表せない．なぜなら,

$$\boldsymbol{e}_2 = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = (c_1 + c_2c)\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \begin{cases} (c_1 + c_2c)a_1 = 0 \\ (c_1 + c_2c)a_2 = 1 \end{cases}$$

で, 第 1 式を満たすためには $c_1 + c_2c = 0$ でなければならないが, このとき $(c_1 + c_2c)a_2 = 0$ となってしまい第 2 式が満たされないので, この条件を満たす定数 c_1, c_2 は存在しないからである．しかし, これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張るということに反する．一方, $a_2 \neq 0$ のときも同様に $\boldsymbol{e}_1$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合では表わせないことになり, 矛盾が生じる．従って, 結局 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であるという仮定は間違っており, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である．□

別証明としては, 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し, $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ を c_1, c_2 に関する連立方程式とみて解く方法などがあります．

注意. $d = a_1b_2 - a_2b_1$ とおくと, 上記の証明により,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が線形独立} \Leftrightarrow d \neq 0$$

となることがわかります. この d という量は, 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の <u>行列式</u> と呼ばれるもので, 今後重要になってきます (行列式については 2 学期に線形代数 II の授業で勉強します).