1 平面ベクトル の解答例

演習 1.1 (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 + 4c_2 \\ c_1 - 3c_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c_1 + 4c_2 = 4 \\ c_1 - 3c_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = -2,\ c_2 = 0.$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

次の (2), (3) も同様.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-9) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$

$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

演習 1.2 (1) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + 4c_2 = 0 \\ c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$

よって, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形独立である.

(2) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}$ となるような $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在することがいえれば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を張ることが分かる. (逆に, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ の形で表すことができない平面ベクトルが存在するならば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を張らないということになる.)

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c_1 + 4c_2 = x_1 \\ c_1 - 3c_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = \frac{-3x_1 - 4x_2}{2}, \quad c_2 = \frac{-x_1 - 2x_2}{2}$$

であるから, 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}$ となるような $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ は必ず存在する. よって, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を張る.

演習 1.3

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2+4c_3=0\\c_1+3c_2+5c_3=0\end{cases}\Leftrightarrow c_1=2c_2=-2c_3.$$

この条件を満たす実数の組 (c_1, c_2, c_3) は $(0, 0, 0)$ 以外にも存在する (例えば $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$) ので, 3 つのベクトルは線形従属である.

演習 1.4 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属なので, $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ となるような $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在する. このときもし $c_1 = 0$ ならば, $c_2 \neq 0$ で, $\boldsymbol{b} = -\dfrac{c_1}{c_2}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となってしまい $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ に反する. よって, $c_1 \neq 0$ であり, $c = -\dfrac{c_2}{c_1}$ とおけば $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ となる. 従って,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (c\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = c||\boldsymbol{b}||^2$$

で, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より $||\boldsymbol{b}|| \neq 0$ だから,

$$c = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{b}||^2}$$

を得る. よって,

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{b}||^2}\boldsymbol{b}.$$