正 17 角形の作図 (問題 10.1 (9) の解答例)

1 Gauss による説明

高木貞治著「近世数学史談」の冒頭に, Gauss によって書かれた正 17 角形の作図法 (友人 Gerling への手紙) が訳出されているので, まずその内容をフォローする.

$\varphi = 2\pi/17$, $\xi = e^{\sqrt{-1}\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ とおく. ξ は円分多項式 $F_{17}(X) = (X^{17}-1)/(X-1) = \sum_{n=0}^{16} X^n$ の根だから,

$$\sum_{n=0}^{16} \xi^n = 0.$$

この式の実部をみれば ($\cos(17-n)\varphi = \cos n\varphi$ に注意して),

$$0 = \sum_{n=0}^{16} \cos n\varphi = \sum_{n=1}^{8} (\cos n\varphi + \cos(17-n)\varphi) + 1 = 2\sum_{n=1}^{8} \cos n\varphi + 1.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{8} \cos n\varphi = -\frac{1}{2} \tag{1.1}$$

を得る.

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi + \cos 4\varphi \\ b &= \cos 2\varphi + \cos 8\varphi \\ c &= \cos 3\varphi + \cos 5\varphi \\ d &= \cos 6\varphi + \cos 7\varphi \end{aligned}\ \right|\quad \begin{aligned} e &= a+b \\ f &= c+d \end{aligned}$$

とおく. (1.1) により,

$$e + f = -\frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

また, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ と $\cos(17-n)\varphi = \cos n\varphi$ に注意すれば,

$$2ef = 2(a+b)(c+d) = 2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4a + 4b + 4c + 4d = 4(e+f) = -2$$

すなわち

$$ef = -1 \tag{1.3}$$

を得る. すると (1.2) と (1.3) から, e と f が二次方程式

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

の解であることが分かる. ここで a, b の近似値を求めてみると, $a \fallingdotseq 1.025$, $b \fallingdotseq -0.244$ なので $e = a + b$ は上記二次方程式の正の解で, もう一つの負の解が f である:

$$e = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \quad f = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

さて, 前と同様の計算により $2ab = e + f = -1/2$ を得るので, $a + b = e$ とあわせれば a と b は二次方程式

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0 \tag{1.4}$$

の解であることが分かる. よって $a > b$ より,

$$a = \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$$
$$b = \frac{e - \sqrt{e^2 + 1}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}.$$

また同様に, $2cd = e + f = -1/2$, $c + d = f$ より, c と d は二次方程式

$$x^2 - fx - \frac{1}{4} = 0 \tag{1.5}$$

の解である. よって $c > d$ より[1]

$$c = \frac{f + \sqrt{f^2 + 1}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}$$
$$d = \frac{f - \sqrt{f^2 + 1}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}.$$

さて,

$$2\cos\varphi\cos 4\varphi = c$$
$$2\cos 2\varphi\cos 8\varphi = d$$
$$2\cos 3\varphi\cos 5\varphi = b$$
$$2\cos 6\varphi\cos 7\varphi = a$$

だから, a, b, c, d が求まれば, それらを係数とする二次方程式を立てて解くことにより $\cos\varphi, \ldots, \cos 8\varphi$ (従って $\cos 9\varphi, \ldots, \cos 16\varphi$ も) を求めることができる. Gauss の手紙では $\cos\varphi$ を求めてあるが, 後で実際の作図法を述べる際には $\cos 3\varphi$ と $\cos 5\varphi$ を使う[2]ので, この二つだけ求めておく. $\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c$, $\cos 3\varphi\cos 5\varphi = b/2$ なので, 二次方程式

$$x^2 - cx + \frac{b}{2} = 0$$

[1] $\xi, \ldots, \xi^8$ の複素平面上での配置を考えてみれば, $\cos\varphi > \cos 2\varphi > \cdots > \cos 8\varphi$.

[2] 後述するが, (1.5) の正の解 c と (1.4) の負の解 b が角の四等分により比較的容易に作図できるので, この c, b から直接的に求まる $\cos 3\varphi$ と $\cos 5\varphi$ も作図しやすい.

を解いて

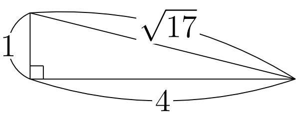
$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \frac{c+\sqrt{c^2-2b}}{2} = (c/2) + \sqrt{(c/2)^2 + (\sqrt{(-b/2)})^2} \\ \cos 5\varphi &= \frac{c-\sqrt{c^2-2b}}{2} = (c/2) - \sqrt{(c/2)^2 + (\sqrt{(-b/2)})^2}\end{aligned} \tag{1.6}$$

を得る.

2　準備

長さ 1 と長さ $r > 0$ の線分が与えられた時, 長さ $\sqrt{r}$ の線分を定木とコンパスで作図することができる (教科書の例題 3.25) ので, それを用いれば, 原理的には, あらゆる二次方程式を定木とコンパスで解くことができる. しかしそれでは手数がかかるので, もっと手数の少ない作図法が工夫されており, 現在よく知られているのは後述する「Richmond (リッチモンド) の方法」と呼ばれる手順である. ここではそれを理解するための準備として主に角の四等分に関する一般論を補足する.

2.1　$\sqrt{17}$ の作図



$17 = 1^2 + 4^2$ なので, 隣辺の長さが 1 と 4 の直角三角形を描けば, その斜辺の長さが $\sqrt{17}$ である.

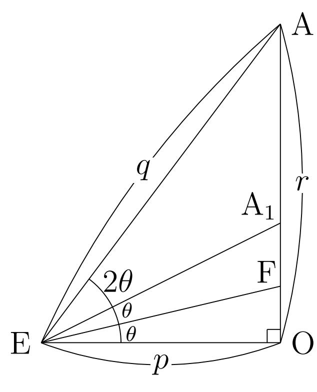
2.2　角の四等分と二次方程式の解

命題 2.1. ある直角三角形の隣辺の一つの長さが p, 斜辺の長さが q であったとする. その直角三角形を EOA ($\angle\mathrm{EOA} = \pi/2$, $\overline{\mathrm{OE}} = p$) とおく. $\angle\mathrm{OEA}$ の二等分線と OA との交点を A_1 とし, さらに $\angle\mathrm{OEA}_1$ の二等分線と OA との交点を F とおく.

このとき, $r = \overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{q^2 - p^2}$ とすると, $y = (r/p)\overline{\mathrm{OF}}$ は二次方程式

$$y^2 + 2(p+q)y - r^2 = 0 \tag{2.1}$$

を満たす[3].



[3] $(p+q)^2 < \sqrt{(p+q)^2 + r^2}$ より, 方程式 (2.1) は正と負の解をもつが, その正の解の方が y

[証明] $\theta = \angle\mathrm{OEF}$ とすると, $\angle\mathrm{OEA} = 4\theta$ だから,

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = \frac{p}{q}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \sqrt{\frac{q+p}{2q}}, \qquad \overline{\mathrm{EA_1}} = \frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\cos 2\theta} = p\sqrt{\frac{2q}{q+p}}, \\
\overline{\mathrm{OA_1}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{EA_1}}^2 - \overline{\mathrm{OE}}^2} = p\sqrt{\frac{q-p}{q+p}} = \frac{p(q-p)}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p(q-p)}{r} = \frac{\overline{\mathrm{OE}}(\overline{\mathrm{EA}} - \overline{\mathrm{OE}})}{\overline{\mathrm{OA}}}.
\end{aligned}$$

三角形 OEA の代わりに今度は $\mathrm{OEA_1}$ をとって上記と同じ計算をすれば,

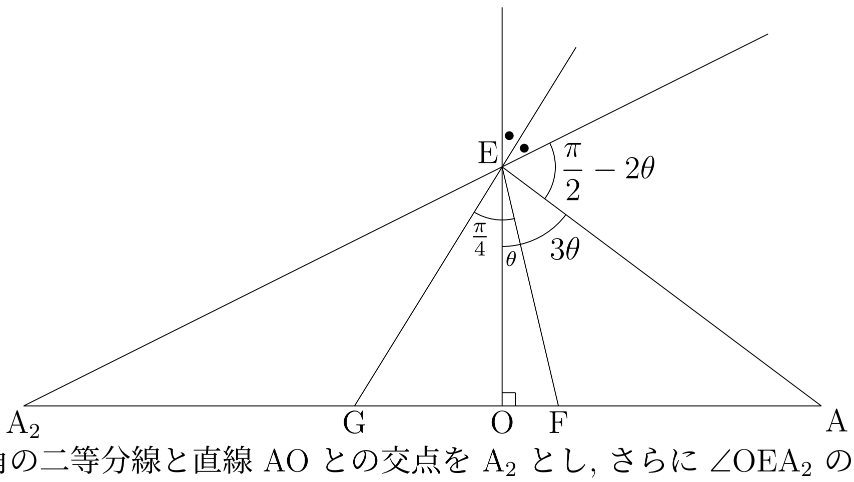
$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OF}} &= \frac{\overline{\mathrm{OE}}(\overline{\mathrm{EA_1}} - \overline{\mathrm{OE}})}{\overline{\mathrm{OA_1}}} = \frac{p\left(p\sqrt{\frac{2q}{q+p}} - p\right)}{\frac{p(q-p)}{r}} = \frac{rp\left(\sqrt{\frac{2q}{q+p}} - 1\right)}{q-p} \\
&= \frac{rp(\sqrt{2q}\sqrt{q+p} - (q+p))}{q^2-p^2} = \frac{p(\sqrt{2q^2+2pq} - (p+q))}{r}.
\end{aligned}$$

よって $y = (r/p)\overline{\mathrm{OF}}$ とすれば

$$(y + (p+q))^2 = 2q^2 + 2pq.$$

これにより (2.1) を得る. □

命題 2.2. 上記の三角形 EOA をまた考えて, 今度は $\angle\mathrm{OEA}$ の補角を四等分する.



$\angle\mathrm{OEA}$ の補角の二等分線と直線 AO との交点を $\mathrm{A_2}$ とし, さらに $\angle\mathrm{OEA_2}$ の二等分線と $\mathrm{OA_2}$ との交点を G とする. (このとき $\angle\mathrm{FEG} = \pi/4$ となる.) p, q, r は前の通りとするとき, $z = (r/p)\overline{\mathrm{OG}}$ は二次方程式

$$z^2 + 2(q-p)z - r^2 = 0 \tag{2.2}$$

を満たす.

[証明] 前と同様 $\theta = \angle\mathrm{OEF}$ とおくと, $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = p/q$ だから,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{p}{2q}} = \sqrt{\frac{q-p}{2q}}.$$

$\angle\mathrm{OEA}_2 = \pi/2 - 2\theta$ なので,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{EA}_2} &= \frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)} = p\sqrt{\frac{2q}{q-p}}, \\
\overline{\mathrm{OA}_2} &= \sqrt{\overline{\mathrm{EA}_2}^2 - \overline{\mathrm{OE}}^2} = p\sqrt{\frac{q+p}{q-p}} = \frac{p(q+p)}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p(q+p)}{r}.
\end{aligned}$$

よって, 直角三角形 OEA_2 について前と同様に考えれば,

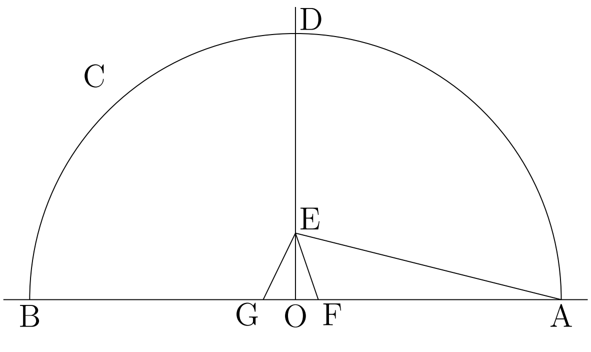
$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OG}} &= \frac{\overline{\mathrm{OE}}(\overline{\mathrm{EA}_2} - \overline{\mathrm{OE}})}{\overline{\mathrm{OA}_2}} = \frac{p\left(p\sqrt{\frac{2q}{q-p}} - p\right)}{\frac{p(q+p)}{r}} = \frac{rp\left(\sqrt{\frac{2q}{q-p}} - 1\right)}{q+p} \\
&= \frac{rp(\sqrt{2q}\sqrt{q-p} - (q-p))}{q^2-p^2} = \frac{p(\sqrt{2q^2-2qp} - (q-p))}{r}.
\end{aligned}$$

よって $z = (r/p)\overline{\mathrm{OG}}$ とすれば

$$(z + (q-p))^2 = 2q^2 - 2qp.$$

これにより (2.2) を得る. □

3　正 17 角形の作図手順 (Richmond の方法)



最初に与えられた長さ 1 の線分を OA とし, O を原点, 直線 OA を x 軸とみなす (A の座標が $(1,0)$). O を中心とした半径 1 の円 C を描き, C と直線 OA との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(-1,0)$ とする. また, 線分 AB の垂直二等分線を引き, その C との交点のうち座標が $(0,1)$ となる方を D とおく.

次に, 線分 OD を四等分し, 点 E$(0, 1/4)$ をとる. すると $\overline{\mathrm{EA}} = \sqrt{17}/4$ となる. そして命題 2.1 のように OA 上の点 F を $\angle\mathrm{OEA} = 4\angle\mathrm{OEF}$ となるようにとる. 二次方程式 (1.5) の両辺を 4 倍すると

$$(2x)^2 + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)(2x) - 1 = 0$$

となるから, この式と (2.1) とを見比べて $2c = 4\overline{\mathrm{OF}}$ を得る. よって

$$\overline{\mathrm{OF}} = \frac{c}{2}$$

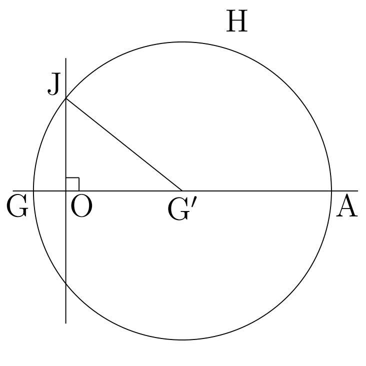
である. さらに, OB 上の点 G を $\angle\mathrm{FEG} = \pi/4$ となるようにとる (直線 EG が $\angle\mathrm{OEA}$ の補角の四等分線). 二次方程式 (1.4) の両辺を 4 倍すれば

$$(-2x)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4}\right)(-2x) - 1 = 0$$

となるから, この式と (2.2) とを見比べれば命題 2.2 により $-2b = 4\overline{\mathrm{OG}}$ を得る. よって

$$\overline{\mathrm{OG}} = -\frac{b}{2}$$

となる.



さて, $c/2$ と $-b/2$ が作図できたので, 次は (1.6) を見ながら $\cos 3\varphi$ と $\cos 5\varphi$ を作図したい. その為にはまず $\sqrt{(-b/2)}$ を作図する必要がある.

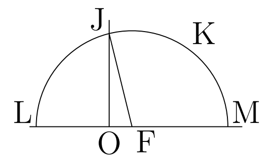
GA を直径とする円 H と OD との交点を J とする. GA の中点 (H の中心) を G′ とすれば,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{G'J}} &= \overline{\mathrm{GG'}} = \frac{1 + \overline{\mathrm{OG}}}{2}, \\
\overline{\mathrm{OG'}} &= \frac{(1 + \overline{\mathrm{OG}})}{2} - \overline{\mathrm{OG}} = \frac{1 - \overline{\mathrm{OG}}}{2},
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{OJ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{G'J}}^2 - \overline{\mathrm{OG'}}^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \overline{\mathrm{OG}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \overline{\mathrm{OG}}}{2}\right)^2} = \sqrt{\overline{\mathrm{OG}}} = \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

を得る (これは教科書の例題 3.25 に書いてある手法と同じ).

さて, ここで直角三角形 OFJ を考えると,

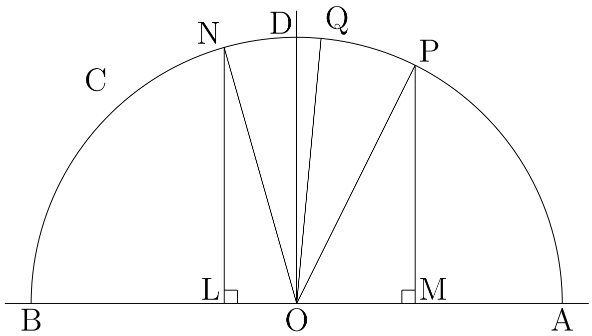


$$\overline{\mathrm{FJ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OF}}^2 + \overline{\mathrm{OJ}}^2} = \sqrt{(c/2)^2 + (\sqrt{(-b/2)})^2}$$

である. よって (1.6) により,

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \overline{\mathrm{OF}} + \overline{\mathrm{FJ}} \\ -\cos 5\varphi &= \overline{\mathrm{FJ}} - \overline{\mathrm{OF}}. \end{aligned}$$

そこで, F を中心とする半径 $\overline{\mathrm{FJ}}$ の円 K を描き, K と OB との交点を L, OA との交点を M とすれば, L の座標が $(\cos 5\varphi, 0)$, M の座標が $(\cos 3\varphi, 0)$ となる.



L を通り AB に垂直な直線が D の側で円 C と交わる点を N とし, M を通り AB に垂直な直線が D の側で円 C と交わる点を P とする. すると両者の座標はそれぞれ $\mathrm{N}(\cos 5\varphi, \sin 5\varphi)$, $\mathrm{P}(\cos 3\varphi, \sin 3\varphi)$ となるから,

$$\angle \mathrm{AON} = 5\varphi, \quad \angle \mathrm{AOP} = 3\varphi.$$

よって, $\angle \mathrm{PON} = 2\varphi$ である. そこで, $\angle$PON の二等分線が D の側で円 C と交わる点を Q とすれば,

$$\angle \mathrm{POQ} = \varphi$$

となる.

後は, 半径 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の円で単位円 C を切っていけば正 17 角形のすべての頂点が得られる.