10. 正多角形の作図

問題 10.1. 次の正多角形はすべて定木とコンパスで作図可能である. 実際に描き方を求めよ. (最初に与えられているのは長さ 1 の線分のみで, 可能な操作は教科書 152〜153 ページの (R1)(R2)(C1)(C2) です. 長くなり黒板で説明し辛いようでしたら, レポートにして提出してください.)

(1) 正 3 角形
(2) 正方形
(3) 正 6 角形
(4) 正 8 角形
(5) 正 10 角形
(6) 正 12 角形
(7) 正 15 角形
(8) 正 16 角形
(9) 正 17 角形

上記は $3 \leq n \leq 17$ において正 n 角形が作図可能なケースを (教科書に書いてある正 5 角形を除いて) 網羅しています. 正 17 角形の作図可能性は来週森田先生の授業でやるかもしれませんが, それを理解してレポート等に仕上げた人には一定の評価が与えられてしかるべきですから, 正 5 角形のように除いたりはしません.

フェルマー素数. $2^{2^r}+1$ (r は非負整数) の形の整数を**フェルマー数**といい, $r = 0, 1, 2, 3, 4$ のときは素数になることが知られています (**フェルマー素数**という):

$$\begin{aligned} 2^{2^0} + 1 &= 3, \\ 2^{2^1} + 1 &= 5, \\ 2^{2^2} + 1 &= 17, \\ 2^{2^3} + 1 &= 257, \\ 2^{2^4} + 1 &= 65537. \end{aligned}$$

しかし, $r = 5$ の場合は合成数になります (Euler による):

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$$

実は, $r \geq 5$ なるフェルマー素数が存在するかどうかはいまだ分かっていません. だから, 現在までのところ, 人類が知っている最大のフェルマー素数は 65537 であることになります.

さて, p がフェルマー素数ならば正 p 角形は定木とコンパスで作図可能であることが知られているのですが, これに因んで (前回に引き続き) 「酷い演習問題」を出題しておきましょう.

問題 10.2. (1) 定木とコンパスで正 257 角形を作図せよ.
(2) 定木とコンパスで正 65537 角形を作図せよ.

まあ, これは誰もやらないと思いますが (笑). それでも (1) ならば根性があればまだ常人でもなんとかなるレベルではあります.

(2) になるともう, 人生を賭けるくらいの覚悟が必要かもしれませんが, なんと 120 年前に実際にこれをやってのけた人がいます. J. Hermes というドイツの数学者なのですが, この人は 1879 年にフェルマー素数に対する円等分についての論文で博士をとって以来, 10 年かけてついに正 65537 角形の作図を完成させました. それは 200 ページ以上に及ぶ原稿で, 現在はゲッチンゲン大学に保管されているようです. また, その大まかな概略が

J. Hermes, "Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile", Nachr der K. Ges. Der Wiss. zu Göttingen 1894, pp. 170–186

という論文に書いてあるようですが, これはオンラインで読めます:

DigiZeitschriften http://www.digizeitschriften.de
(「Hermes 65537」で検索)

※筑波大はこのサイトの subscriber ではありませんが, 雑誌によっては non-subscriber でも読めるようです.

余談ですが, 上記の Hermes の論文と同じ巻に

D. Hilbert, "Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers" (pp. 224–236)
R. Dedekind, "Zur Theorie der Ideale" (pp. 272–277)

という二つの論文があります. これらは将来整数論を勉強したいと思っている人には面白いかもしれません. 代数的整数論のトピックに Hilbert 理論 (素イデアルの分解・惰性・分岐) というものがあるのですが, この二つはその原論文です. (実は Dedekind も Hilbert とは独立に同様な結果を得ていたようです.) 素イデアルの分解・惰性・分岐というのは円分体の理論にとって大変重要で, Hilbert は後にそれを用いて「Kronecker-Weber の定理」という, ある美しい定理の (別) 証明を行っています[1]

また同じ巻に,

A. Hurwitz, "Ueber die Theorie der Ideale" (pp. 291–298)

という論文もあります. これは多分, 「イデアル論の基本定理」の証明 (の簡略化) に関するものだと思います. これも調べれば数学史的にけっこう面白い話でしょうが, ちょっと脱線しすぎたのでこれくらいにしておきます.

[1]高木貞治「代数的整数論　第２版」(岩波書店) の第８章を参照