9. 方程式の解法

3 次方程式や 4 次方程式の解法は 16 世紀に発見されたものですが, それらの解法はその後ラグランジュにより研究され, もっと理論的な高みに立った視点からの解法として書き直されています. 現在はそれはラグランジュの解法として知られており, また, そこで用いられた方程式の解の置換という考え方が有限群論の起源ともなりました. そしてそれはまた後にアーベルやガロアが 5 次方程式に取り組む時の礎でもあったのです.

高木貞治著「代数学講義」(共立出版), 第 6 章にそのラグランジュの解法が現代的に整理された形で載っているのですが, 今回のプリントではそれを演習問題をはさみつつ紹介したいと思います.

9.1. 2 次方程式の解法を見直してみる

見通しを良くするため, まず 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

をラグランジュの解法ふうに解いてみます. (1) の解を x_1, x_2 とすると, $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$ より, 解と係数の関係

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = b \tag{2}$$

が得られます.

ここで, S_2 を 2 次の対称群, $f = f(x_1, x_2)$ を x_1, x_2 の多項式とするとき, $\sigma \in S_2$ に対し, f の x_1, x_2 を $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}$ で置き換えた多項式 $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$ を $\sigma(f)$ と表すことにします. もし任意の $\sigma \in S_2$ に対して $\sigma(f) = f$ となるなら, f を x_1, x_2 の**対称式**と呼びます. 例えば解と係数の関係 (2) に登場する $x_1 + x_2$ と $x_1 x_2$ は対称式になります. さらに x_1, x_2 の任意の対称式はこの 2 つを使って表せる (ということはつまり, 元の方程式の係数 a, b で表せる) ことが知られているので, この 2 つを**基本対称式**と呼びます. ラグランジュの解法の第一のポイントは, 方程式の解の対称式がもとの方程式の係数を使って表せることにあります.

さて, ここでおもむろに

$$u = x_1 - x_2$$

とおいて, この u を求めることを考えます. これは対称式ではありませんが,

$$(1,2)(u) = -u$$

ですから, あまり形は変わりません (これが第二のポイントです). また,

$$x_1 = \frac{1}{2}(u + (x_1 + x_2)) = \frac{1}{2}(u - a),$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}(u - (x_1 + x_2)) = -\frac{1}{2}(u + a)$$

だから, 実は u を求めることと x_1, x_2 を求めることは同値になります. ところが驚くべきことに, この u を求めることは x_1, x_2 を求めるよりはるかに簡単なのです. 実際, u を求めるために, X に関する方程式

$$\prod_{\sigma \in S_2} (X - \sigma(u)) = 0 \tag{3}$$

を解くことを考えます. この式の左辺の x_1, x_2 にどのような置換を施しても全体は変わらないので, X の多項式とみたときの各係数は x_1, x_2 の対称式になるはず $\cdots$ ということは, a, b を使って表せるはずです. そう思ってやってみると, (3) の左辺は

$$(X-u)(X+u) = X^2-u^2 = X^2-(x_1-x_2)^2 = X^2-\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\} = X^2-(a^2-4b)$$

となります. すると方程式 (3) は

$$X^2 - (a^2 - 4b) = 0$$

となるので, 最初の方程式 (1) よりはるかに簡単に解けて, 解 $u = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$ を得ます. この u から x_1, x_2 を求めれば, めでたく 2 次方程式の解の公式が得られるわけです.

ここで用いた u という式は, 元の方程式を解くための**分解式**と呼ばれ, 方程式 (3) は**分解方程式**と呼ばれています.

9.2. Lagrange による 3 次方程式の解法

では, 次に 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

を解いてみます. まず, この方程式の解を x_1, x_2, x_3 とすると, $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ より, 解と係数の関係

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = -c$$

が得られます. この 3 つが x_1, x_2, x_3 に関する基本対称式です (S_3 のどの元を施しても変わらないことを確認しておいてください).

ここで, 1 の虚数立方根 $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ をとって, 分解式として u, v を

$$u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \quad v = (2, 3)(u) = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

とおきます.

問題 9.1. (1) 関係式 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いて, u, v を求めることと x_1, x_2, x_3 を求めることが同値であることを示せ (つまり x_1, x_2, x_3 を u, v, a, b, c を使って表せ).

(2) u に S_3 の 6 個の元を施した結果をすべて求め, あまり形が変わらない (例えば $(1,2,3)(u) = \omega^2 u$) ことを確認せよ.

次に, u, v を求めるために, 分解方程式

$$\prod_{\sigma \in S_3} (X - \sigma(u)) = 0$$

を考えます. 実は上の問題の (2) を使うと,

$$\begin{aligned}\prod_{\sigma \in S_3} (X - \sigma(u)) &= (X-u)(X-\omega u)(X-\omega^2 u)(X-v)(X-\omega v)(X-\omega^2 v) \\ &= (X^3 - u^3)(X^3 - v^3) = (X^3)^2 - (u^3+v^3)X^3 + u^3 v^3\end{aligned}$$

となります. 後は係数の $u^3 + v^3$ と $u^3 v^3$ を x_1, x_2, x_3 の基本対称式 (つまり a, b, c) を使って表せば, 2 次方程式を解くことにより u^3, v^3 が求まり, さらにその立方根をとって u, v が求まることが分かります.

問題 9.2. (1) $u^3 + v^3$ と $u^3 v^3$ を a, b, c を使って表し, 3 次方程式の解法を完成させよ.

(2) こちらの解法をいわゆる「カルダノの解法」と比較して, 実は別々のルートで同じ分解方程式に至っていることを確認せよ.

[ヒント] (1) $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$ なので, $u^3 + v^3$ は $u + v = 2x_1 - x_2 - x_3$ $(= 3x_1 + a)$ を因子にもつはず. さらに対称式であることから, $2x_2 - x_1 - x_3$ $(= 3x_2 + a)$ や $2x_3 - x_1 - x_2$ $(= 3x_3 + a)$ も因子にもつはずだということが分かる. 次数 (と x_1^3 の係数) を比較すれば, その 3 つの積が $u^3 + v^3$ と一致しなければならない:

$$u^3 + v^3 = (3x_1 + a)(3x_2 + a)(3x_3 + a).$$

$u^3 v^3$ については, uv が既に対称式であることを確認してそれを a, b, c で表し, さらにその結果を 3 乗すればよい.

9.3. 4 次方程式の解法

今度は 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

を考えてみます.

問題 9.3. 方程式の解を x_1, x_2, x_3, x_4 として, 4 次方程式に関する解と係数の関係を求めよ.

分解式としては,

$$u = (x_1+x_2)-(x_3+x_4), \quad v = (2,3)(u) = (x_1+x_3)-(x_2+x_4), \quad w = (2,4)(u) = (x_1+x_4)-(x_2+x_3)$$

をとることにします.

問題 9.4. u, v, w を求めることと x_1, x_2, x_3, x_4 を求めることが同値であることを示せ.

問題 9.5. (1) u に S_4 の 24 個の元を施した結果をすべて求め, あまり形が変わらないことを確認せよ.

(2) 分解方程式

$$\prod_{\sigma \in S_4} (X - \sigma(u)) = 0$$

が「解ける」方程式であることを示し, 4 次方程式の解法を完成させよ. (行き詰ったら高木貞治の本を参照してもよい.)

9.4. 5 次方程式の解法？

最後に「労多くして功少ない」酷い演習問題を出題しておきます (私もまだこれをちゃんとやったことはないです).

問題 9.6. うまい分解式をみつけて 5 次方程式

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

に対する Lagrange の解法を試みよ. (最後まで行くことは不可能なので, どこかで壁にぶつかるはずです. その壁はどのあたりにあるのか … といったところです. もちろん模範解答はありません.)

アーベルがその不可能性を証明するまでは, 「うまく分解式をとれば 5 次方程式の解法が見つかるのではないか」と思われていた時代があったわけです. 実はなんとアーベルやガロア自身も, 一度は「解けた」と誤って思いこんでしまった経験があるみたいです (その「解答」がどういうものだったのかは知らないのですが). 運が良ければ皆さんも (そして私も) 同じような経験をすることができるのかもしれません …