7. 体上の線形代数・体上の多項式環 (追加)

問題 7.3. 有限体 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{F}_2[x]$ において, 次の多項式を因数分解せよ.

(1) x^2+1 (2) x^3+x^2+x+1 (3) x^3+x+1 (4) x^3+1

問題 7.4. 有限体 $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{F}_3[x]$ において, 次の多項式を因数分解せよ.

(1) x^2+1 (2) x^2+2 (3) x^2+x+1 (4) x^3+x^2+x+1

(5) x^3+2x^2+2 (6) x^3+x+2 (7) x^3+x^2+2x+2 (8) x^4+x^3+x+1

8. 体の拡大

L を体, K をその部分体とする. このとき K から見た場合, L は K の**拡大体**であるという. またこの状況を L/K と表すこともある. L を K-ベクトル空間とみたときの次元 $\dim_K L$ を $[L:K]$ と書き, L/K の**拡大次数**という.

問題 8.1. 次の体の拡大 L/K の拡大次数 $[L:K]$ を求めよ.

(1) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $K=\mathbb{Q}$

(2) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(3) $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $K=\mathbb{Q}$

(4) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$, $K=\mathbb{Q}$

(5) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $K=\mathbb{Q}$

(6) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{6})$

(7) $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})$, $K=\mathbb{Q}$

代数拡大.

L を体 K の拡大体とする. $a \in L$ について, あるゼロでない K 係数多項式 $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ が存在して $f(a)=0$ となるとき, a は K **上代数的**であるという. 特に, $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数を**代数的数**と呼び, そうでないものを**超越数**と呼ぶ.

体拡大 L/K について, L のすべての元が K 上代数的であるとき, L/K は**代数拡大**であるという.

問題 8.2. $[L:K] < \infty$ ならば L/K は代数拡大であることを示せ.

問題 8.3. L を体, M を L の部分体, K を M の部分体とする (つまり $K \subset M \subset L$). このとき, L/M, M/K が共に代数拡大ならば L/K も代数拡大であることを示せ.