6. 体とその標数 (追加)

問題 6.6. 体 K の標数が $p > 0$ なら, 任意の $a, b \in K$ に対し $(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つことを示せ.

R を可換環とする. R の部分環のうち, 体になっているものは R の**部分体**という.

問題 6.7. L を体とする. K_1, K_2 が L の部分体ならば $K_1 \cap K_2$ も L の部分体であることを示せ.

問題 6.8. 体 K の部分体が K のみであるとき, K を **素体**という.

(1) 素体は $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p : 素数) に同型 (環同型) であることを示せ.

(2) 任意の体は素体を唯一つだけ含むことを示せ.

7. 体上の線形代数・体上の多項式環

K を体とする. 実ベクトル空間や複素ベクトル空間と同様にして, K の元をスカラーとするベクトル空間を定義することができる. これを K-ベクトル空間 (または「K 上のベクトル空間」) という. 例えば, R を可換環, K をその部分体とすると, R は自然に K-ベクトル空間になる. 線形独立, 線形従属, 基底, 次元 ($\dim_K$ と書く) などの概念や線形写像についても, これまで学んできた線形代数と同様に考えることができる.

問題 7.1. R を整域, K をその部分体とする. もし $\dim_K R < \infty$ ならば, R は体であることを示せ.

K 係数の多項式全体を $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in K, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}$ と書く. この $K[x]$ は多項式の和と積に関して可換環となる.

問題 7.2. $f(x) \in K[x]$ を次数が $\deg f = n \geq 1$ の多項式とする. これに対し, 単項イデアル $(f(x)) = \{g(x)f(x) \mid g(x) \in K[x]\}$ を考える.

(1) 剰余環 $K[x]/(f(x))$ は $1 + (f(x)), x + (f(x)), x^2 + (f(x)), \ldots, x^{n-1} + (f(x))$ を基底とする n 次元 K-ベクトル空間であることを示せ.

(2) $K[x]/(f(x))$ が整域 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が $K[x]$ で既約　を示せ.

注意. 上記の問題を合わせれば, $f(x) \in K[x]$ が既約多項式のとき剰余環 $K[x]/(f(x))$ は体になることが分かる. ここで, K が有限体であった場合, K の元の数を q, $\deg f = n \geq 1$ とすると, $K[x]/(f(x))$ は q^n 個の元からなる有限体になる.