

6. 体とその標数

K を可換環とし, $0_K, 1_K$ をそれぞれ K のゼロ元, 単位元とする. もし K の 0_K でない元がすべて可逆元 (つまり, 任意の $a \in K$ について, $a \neq 0_K$ ならば, ある $x \in K$ が存在して $ax = xa = 1_K$) ならば, K は体であるという. 元の個数が有限個の体を有限体, 無限個の体を無限体と呼ぶ.

問題 6.1. 体は必ず整域になること (K が体のとき, $a, b \in K, ab = 0_K$ ならば $a = 0_K$ または $b = 0_K$) を示せ.

問題 6.2. R を, 元の個数が有限個の可換環とする.

- (1) もし R が整域ならば, R は体であることを示せ.
- (2) もし R の元の個数が素数ならば, R は体であることを示せ.

[ヒント] (1) $a \in R, a \neq 0$ のとき, 写像 $f_a : R \rightarrow R, r \mapsto ar$ が全単射になることを示せばよい.

注意. 問題 6.2 (1) は R の元の個数が無限個のときは必ずしも成立しない (例えば整数全体 \mathbb{Z} は整域だが体ではない).

例. (1) 有理数全体 \mathbb{Q} , 実数全体 \mathbb{R} , 複素数全体 \mathbb{C} は体である.

- (2) p が素数のとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体である.

問題 6.3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ が体になることを示せ.

問題 6.4.

- (1) $n \in \mathbb{Z}, n > 1$ のとき, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体になるのは n が素数のときに限ることを示せ.
- (2) 元の個数が素数でない有限体は存在するか?

体の標数.

K を体とし, 自然数 m に対して

$$m1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_m$$

と置く. このときもし, $n1_K = 0_K$ となる自然数 $n (\geq 1)$ が存在するならば, そのような n のうち最小のものを K の標数という. また, そのような n が存在しないときは K の標数は 0 とする. なお, 体 K の標数を $\text{ch } K$ や $\text{char } K$ などの記号で表すことがある (ch , char は characteristic (標数) の略).

問題 6.5. 体の標数は 0 でなければ素数であることを証明せよ.