4. 多項式行列の単因子論

多項式行列の行列式は一般には多項式になりますが, もし 0 でない定数しかでてこないなら, その行列は可逆になります:

問題 4.1. K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする. $A(x) \in M_n(K[x])$ とするとき, 次の (a), (b) が同値であることを示せ:
(a) ある $B(x) \in M_n(K[x])$ が存在して $A(x)B(x) = B(x)A(x) = E_n$ ($A(x)$ が可逆),
(b) ある $c \in K^\times$ が存在して $\det A(x) = c$.

多項式行列の単因子論においては, 上記の (a)(b) を満たすものが, 整数行列の単因子論におけるユニモジュラー行列の役割を果たします. つまり, 単因子標準形を求める際に使ってよい基本変形は, 対応する基本行列が可逆なものに限られます:

- ある i 行 (列) とある j 行 (列) とを入れ替える ($\leftrightarrow P_{ij}$).
- ある i 行 (列) に, ある j ($\neq i$) 行 (列) の多項式倍を加える
  ($\leftrightarrow E_{ij}(q(x))$, $q(x) \in K[x]$).
- ある i 行 (列) に 0 でない定数 ($\in K^\times$) をかける ($\leftrightarrow E_i(c)$, $c \in K^\times$).

例題. 行列 $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ の単因子標準形を求めよ.

[解答例] $$\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (1/2)x \\ x & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (1/2)x \\ 0 & -(1/2)x^2+3 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1/2)x^2+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) \end{pmatrix}.$$

問題 4.2. 次の行列の単因子標準形を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ x^3+3x & x^2-x \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & x-1 & -1 \\ x+1 & 3 & 2x-7 \\ 1 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ x & x & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x \end{pmatrix}$