1. 種々の代数系, 群と環 (追加)

問題 1.16. $\mathbb{Z}$ を整数全体のなす環とし, $d \in \mathbb{Z}$ に対し, d で生成される $\mathbb{Z}$ のイデアルを $I(d) = \{ad \mid a \in \mathbb{Z}\}$ と書くことにする. $m, n \in \mathbb{Z}$ とするとき, 次に答えよ.

(1) $I(n) \subset I(m) \Leftrightarrow m \,|\, n$ を示せ.

(2) m, n の最大公約数を d とすると $I(m) + I(n) = I(d)$ となることを示せ.

(3) m, n の最小公倍数を l とすると $I(m) \cap I(n) = I(l)$ となることを示せ.

問題 1.17. A, A' を可換環, $\varphi : A \to A'$ を環準同型写像とする.

(1) $0_A, 0_{A'}$ をそれぞれ A, A' のゼロ元とするとき, $\varphi(0_A) = 0_{A'}$ となることを示せ.

(2) $a \in A$, $a' \in A'$ の加法に関する逆元をそれぞれ $-a$, $-a'$ と書く. 任意の $a \in A$ について, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ となることを示せ.

2. 整数行列の単因子論

例題. 下記は, 整数行列 A に整数成分の基本変形を繰り返して単因子標準形 A' を求める手順を表している. これをもとに, $PAQ = A'$ を満たすユニモジュラー行列 P, Q を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(v)}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(vi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A'$$

[解答例１] それぞれのステップに対応する整数基本行列をかけあわせて P, Q を求める.
行基本変形 (基本行列を左からかける): (i)(v)(vi)
列基本変形 (基本行列を右からかける): (ii)(iii)(iv)
であるから,

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{(vi)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(v)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(i)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(ii)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(iii)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(iv)}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[解答例２] 単位行列に行基本変形 (i)(v)(vi) を施した行列が P, 列基本変形 (ii)(iii)(iv) を施した行列が Q である.

[1] ホームページ: http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2009-1/algebraIA-ex/

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(v)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(vi)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = P,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Q.$$

※ 上記で, (vi) を列基本変形をみなした場合, 答えは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

問題 2.1. 下記 (1)〜(6) は, 整数行列 A に整数成分の基本変形を繰り返して単因子標準形 A' を求める手順を表している. これをもとに, $PAQ = A'$ を満たすユニモジュラー行列 P, Q を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = A'$

(2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -74 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 74 \end{pmatrix} = A'$

(3) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = A'$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$

A'

(6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A'$

問題 2.2. 次の整数行列の単因子標準形を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$