1. 種々の代数系, 群と環 (追加)

問題 1.6. G_1, G_2 を群とし, G_1, G_2 の単位元をそれぞれ e_1, e_2 とする.

(1) H_1 を G_1 の部分群, H_2 を G_2 の部分群とすると, $H_1 \times H_2$ は $G_1 \times G_2$ の部分群となることを示せ.

(2) H を $G_1 \times G_2$ の部分群とするとき, $H_1 = \{g \in G_1 \mid (g, e_2) \in H\}$ は G_1 の部分群, $H_2 = \{h \in G_2 \mid (e_1, h) \in H\}$ は G_2 の部分群となり, $H \supset H_1 \times H_2$ となることを示せ.

問題 1.7. G を群, H を G の部分群, g を G の任意の元とする.

(1) $g^{-1}Hg$ も G の部分群であることを示せ.

(2) 同型 $H \cong g^{-1}Hg$ を示せ.

(3) G が有限群のとき, G における H の指数 $[G : H]$ と $g^{-1}Hg$ の指数 $[G : g^{-1}Hg]$ は等しいことを示せ.

問題 1.8. G を有限群, H を G の部分群, K を H の部分群とする. このとき, 指数の関係式 $[G : K] = [G : H][H : K]$ が成り立つことを示せ.

問題 1.9. G を群とし, H を G の部分群とする. もし $[G : H] = 2$ ならば H は G の正規部分群であることを示せ.

問題 1.10. G を群, H を G の部分群, K を G の正規部分群とする.

(1) $H \cap K$ は H の正規部分群であることを示せ.

(2) $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ が G の部分群になることを示せ.

(3) 同型 $HK/K \cong H/(H \cap K)$ を示せ.

問題 1.11. G を有限群とする.

(1) g を G の任意の元とすると, g の位数は G の位数 $|G|$ の約数であることを示せ.

(2) もし $|G|$ が素数ならば, G は巡回群であることを証明せよ.

問題 1.12. S_n を n 次の対称群とするとき, S_n は $(1, i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ の形の互換で生成されること (言い換えれば $S_n = \langle (1), (1, 2), \ldots, (1, n) \rangle$ となること) を証明せよ.

問題 1.13.

(1) 位数 18 の巡回群 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の部分群をすべて求めよ.

[1]ホームページ: http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2009-1/algebraIA-ex/

(2) 正 6 角形の 2 面体群 $D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = s^2 = e,\ sr = r^{-1}s \rangle$ の正規部分群をすべて求めよ.

問題 1.14. $C = \{\cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とおく.

(1) C は $\mathbb{C}^\times$ の部分群であることを示せ.

(2) C の有限部分群はすべて巡回群であることを示せ.

問題 1.15. G を群とするとき, G のすべての元と可換な元全体 $Z(G) = \{s \in G \mid gs = sg \ \ ({}^\forall g \in G)\}$ を G の中心という.

(1) $Z(G)$ は G の正規部分群になることを示せ.

(2) $G/Z(G)$ が巡回群ならば G はアーベル群であることを示せ.