1. 種々の代数系, 群と環

問題 1.1. 次の (1)〜(10) で与えられる集合と演算 $\bullet$ が群の定義を満たすかどうかを調べ、群になる場合はアーベル群かどうかを述べよ. また, 群にならないときは群の定義のどこが成り立たないかを指摘し, もし半群やモノイドになっているならばそれについても述べよ.

(1) 集合は複素数全体 $\mathbb{C}$, 演算は, $a, b \in \mathbb{C}$ に対し $a \bullet b = ab$ (複素数の積).

(2) 集合は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (複素数全体から 0 を除いた集合), 演算 $\bullet$ は (1) と同様に複素数の積.

(3) 3 つの元からなる集合 $S = \{x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

(例)
$x \bullet x = y$
$x \bullet y = z$
$z \bullet y = y$

(4) 集合 $S = \{x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	x	x
z	z	x	z

(例)
$x \bullet x = x$
$x \bullet y = y$
$z \bullet y = x$

(5) 4 つの元からなる集合 $S = \{w, x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	w	x	y	z
w	w	x	y	z
x	x	w	z	y
y	y	z	w	x
z	z	y	x	w

(6) W をアルファベットの小文字 1 文字以上からなる文字列 (スペースは含まない) 全体の集合とする. $a, b \in W$ に対して $a \bullet b$ は文字列 a の後に文字列 b をつなげたもの. 例えば $a =$ daisuu, $b =$ gaku のとき, $a \bullet b =$ daisuugaku.

(7) 上記の $(W, \bullet)$ に "0 文字の文字列" (便宜上, 記号 e で表す) を加えたもの. 任意の $a \in W \cup \{e\}$ に対して $e \bullet a = a \bullet e = a$ とする.

(8) 上記にさらに別の元 d を加える. 文字列 a に対し, $a \bullet d$ は a の末尾の 1 文字を除いたもの, $d \bullet a$ は a の先頭の 1 文字を除いたものとする (ただし, e に対しては

$e \bullet d = d \bullet e = e$). 例えば, $a =$ daisuu のとき, $a \bullet d =$ daisu, $d \bullet a =$ aisuu. また, d 同士の積は $d \bullet d = d$ とする.

(9) 集合は $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\}$, 演算 $\bullet$ は, $A, B \in U$ に対して $A \bullet B = AB$ (行列の積) で定める.

(10) 集合は $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{C}, \\ ac \neq 0 \end{array} \right\}$, 演算 $\bullet$ は行列の積で定める.

問題 1.2. 実数全体 $\mathbb{R}$ は加法 $+$ に関して群となる. この群 $(\mathbb{R}, +)$ について, 次の問題に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ には $\{0\}$ 以外の有限部分群が存在しないことを証明せよ.

(2) H を $\mathbb{R}$ の部分群とする. もし $H \neq \mathbb{R}$ ならば, H はいかなる開区間も含まないことを示せ.

(3) 正の実数全体 $\mathbb{R}_{>0}$ は積 $\cdot$ に関して群となる. このとき $(\mathbb{R}, +)$ と $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ が群としては同型であることを示せ.

問題 1.3. G を群とし, H_1, H_2 を G の正規部分群とする.

(1) 写像 $\varphi : G \to G/H_1 \times G/H_2$ を $\varphi(g) = (gH_1, gH_2)$ により定める. このとき φ が準同型写像になることを示し, $\operatorname{Ker} \varphi$ を求めよ.

(2) G/H_1 と G/H_2 が共にアーベル群ならば $G/(H_1 \cap H_2)$ もアーベル群になることを示せ.

問題 1.4. n を正整数とし, 可換環 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_n, \cdot_n, 0, 1)$ を考える. a を整数とするとき, $a \mod n$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元 (可逆元) であるためには a と n が互いに素であることが必要十分であることを示せ.

問題 1.5. 整数係数の多項式全体 $\mathbb{Z}[X]$ は単項イデアル整域になるかどうかを調べよ.