関数・関数のグラフ

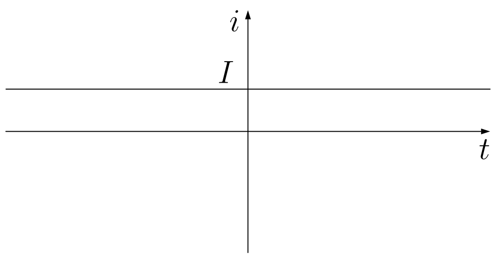
工学や物理学ではさまざまな物理量が登場します. 例えば力学ならば, 距離, 速度, 加速度, 時間, 等々⋯. 電子回路ならば, 電流, 電圧, 抵抗, 等々⋯. それらの物理量は, バラバラに考えるのではなくて, それらの間にどういった相関関係があるのか, ということが重要になるわけですが, その相関関係を数学的に表すのが「関数」です. もう少し具体的に考えてみますと, 例えば力学で落下運動を考えたときに, 時刻 0 における物体の位置から, 時刻 t [秒] における物体の位置までの距離を r [m] とすれば, t に応じて r は刻々と変化します. これを少し言い換えると, t という数に応じて r という数が, ある対応関係に従って対応するわけです. このような対応関係があるときに, 「r は t の**関数**である」といいます. 別の例としては, 例えば電気回路があったとして, 回路の中のあるところを選んでそこでの電流を計測するとします. ある時刻を基準としてそれから t 秒後の電流を i [A] と書くことにしますと, i は t の関数になるわけです[1].

i が t の関数のとき, 「i は t に応じて定まる数である」ということを明示するために, i にカッコをつけて $i(t)$ という風にも書きます. (先ほどの落下運動の例ならば, r が t の関数なので, $r(t)$ と書くわけです.) そうしておくと, 例えば $t = 3$ のときの i の値を表すのに $i(3)$ という表記が使えて便利です. さらに, $i(t)$ の t のところを $-t$ に変えた関数 (今の場合, 基準時刻より t 秒前の電流) を表すのに $i(-t)$ と書くことができたりするわけです. なお, 定常電流の場合は t の値にかかわらず, $i(t)$ は一定の値になりますが, そのような場合も関数と呼ぶことがあります (**定数関数**といいます). 正弦波交流電流であれば $i(t)$ は**三角関数**という関数で表されます. 三角関数についてはこの講義では扱いませんが, 大変重要な関数です.

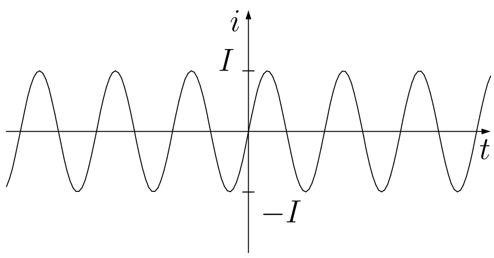
それから, $i(t)$ が t の関数のとき, t がとり得る値の範囲 (正確には, 「$i(t)$ が定義されている t の範囲」) をこの関数の**定義域**といいます. 例えば上の例の場合, 回路が存在する限りそこを流れる電流を考えることができますから, とりあえず, 回路ができてからなくなるまでの時間が定義域となるでしょう. ただし, 「数学的に $i(t)$ が定義可能な範囲」というような意味で定義域という言葉を使うこともあります. 例えば定

[1] 「対応関係」または「対応の法則」そのもの (「写像」といいます) を関数と呼ぶこともあります (「定数関数」「三角関数」というときの「関数」はこの意味です). “$y = f(x)$” という書き方をするときは大抵その意味で, 「y という数は f という写像によって x に対応して変動する数である」というニュアンスです. この場合 f というのは「数」というよりは写像を表す記号として導入されます ($\sin x$ の “sin” はこの意味で用いられます). これに対し, 変動する量 (またはそれを表す記号) のことを変数といいますが, x と y では性質が違うので, 自由に動く x のことを**独立変数**, x に対応して動く y のことを**従属変数** と呼びます. 「関数」という言葉と「従属変数」という言葉の使い方にはなかなか微妙なものがありまして, y を $y(x)$ と書いてこれを関数と呼んでしまっても良いし, $f(x)$ は f という変数を表しているものだと思える場合はその f を従属変数と呼んでしまっても良いわけですが, f を写像を表す記号としている場合には従属変数と言ってはいけません.

数関数や三角関数ならば数学的には定義域は $-\infty$ (マイナス無限大) から $+\infty$ (プラス無限大) までとることができますが, 後で説明する分数関数や無理関数の場合は, 分母がゼロになってはならない, などの理由で定義域は制限されます. また, t が定義域いっぱいに動くときに $i(t)$ がとり得る値の範囲をこの関数の**値域**といいます. 例えば $i(t) = I$ (I は定数) と, 定数関数になる場合は値域は I のところだけで一点になります. 三角関数の場合, 例えば $i(t) = I \sin \omega t$ (I, ω は定数) のときは, 値域は $-I$ から I までとなります (以下のグラフを参照).



$i(t) = I$



$i(t) = I \sin \omega t$

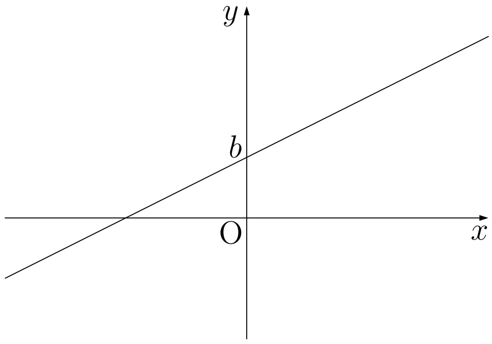
関数のグラフというのは, 正確に言えば, t を定義域内のある範囲で (特に指定しないときは定義域いっぱいに) いろいろ動かしたときに, 座標平面上で座標が $(t, i(t))$ となる点をすべてプロットした図のことをいいます.

一般に科学的な理論においては, このような物理量などを表す関数を使って, その関数の性質を調べたり, 目的に合わせてその関数にいろいろな操作を施したりするわけです. その際, 皆さんがこれからいくつかの数学の授業で学ぶいろいろな関数や, それらを組み合わせたり操作を施したりしたものが頻繁に登場します. この講義では, その「いろいろな関数」のうち, **2次関数**, **分数関数**, **無理関数**, **指数関数**, **対数関数**, を勉強していくわけです. また, 簡単なグラフの操作として, **平行移動**, **対称移動**について, いくつかの関数を例にとって演習をする予定です.

ある物理量を表す関数がわかったときに, その関数のグラフが描ければ, 物理量の大まかな変動の様子を知ることができます. 例えば上の $i(t) = I \sin \omega t$ のグラフならば電流が周期的に変動していることを知ることができるわけです. グラフを描くときに上記の平行移動・対称移動の知識は大いに役に立つと思います. 例えば, ある場所の電流を考えると $i(t) = 1 - e^{-t}$ となることがわかった, というときに (コイルを含む直流回路などで登場するのですが), 指数関数 $f(t) = e^t$ のグラフを知っていれば, これに対称移動や平行移動を繰り返して $i(t)$ のグラフを描くことができるわけです.

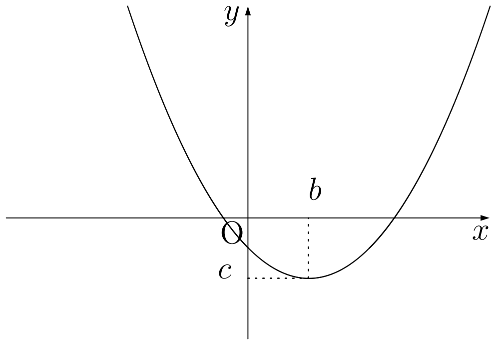
以下, この講義で扱う関数の代表例とそのグラフを箇条書きにしておきます.

1次関数



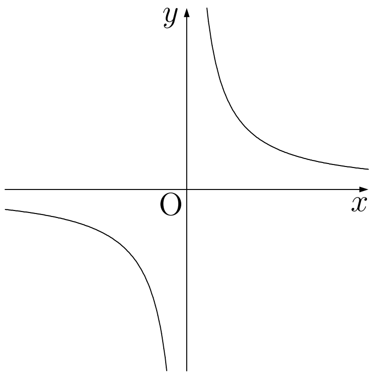
$y = ax + b$

2次関数



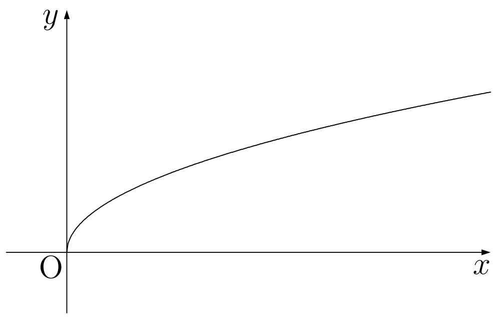
$y = a(x-b)^2 + c$

分数関数



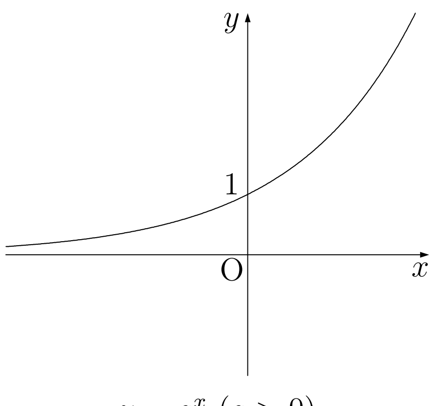
$y = \dfrac{1}{x}$

無理関数



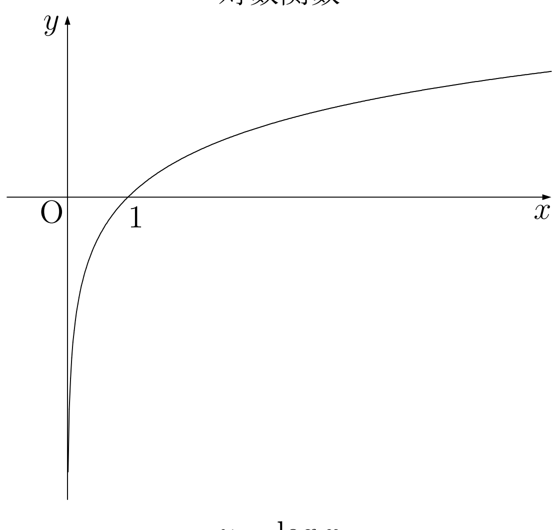
$y = \sqrt{x}$

指数関数



$y = a^x \ (a > 0)$

対数関数



$y = \log x$