指数関数・対数関数 (その 2)

3　対数

3.1　対数の定義

a, x を正の数, ただし $a \neq 1$ とします. 「a を何乗したら x になるか」ということを考えたときに該当する数を $\log_a x$ と書きます. つまり, $\log_a x$ とは, $a^y = x$ となるような y に該当する数のことです:

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow a^y = x.$$

もっと端的に書くとすれば,

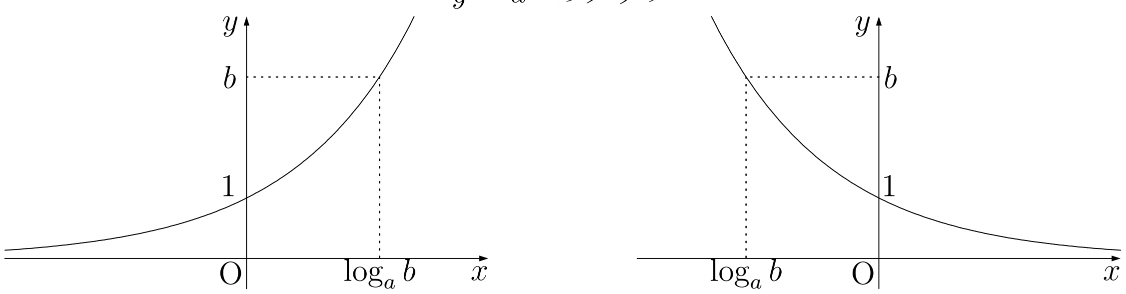
$$a^{\log_a x} = x$$

を満たす数のことです. このとき a のことを**底**と呼び, $\log_a x$ のことを, **a を底とする x の対数**と言います.

ちなみに, $a \neq 1$ とする理由は, 1 は何乗しても 1 のままなので, もし仮に $\log_1 x$ というものを考えたとしてもあまり意味はないからです.

イメージが湧かない人は, 下図のように指数関数 $y = a^x$ のグラフと関連づけて思い描いてみると良いかもしれません.

$y = a^x$ のグラフ



$a > 1$ のとき　　　$a < 1$ のとき

少し具体例を計算してみましょう:

$$\log_{10} 1000 = 3, \qquad \log_3 27 = 3, \qquad \log_5 25 = 2, \qquad \log_2 16 = 4.$$

例えば $\log_3 27$ は, 「3 を何乗したら 27 になるか?」ということを考えると, $3^3 = 27$ だから, $\log_3 27 = 3$ となるわけです. 他も同様です. もう少し毛色の違った例としては,

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \qquad \log_{10} \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}, \qquad \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

等々となります. 例えば 10 を 1/3 乗すれば $\sqrt[3]{10}$ となるので, $\log_{10}\sqrt[3]{10} = 1/3$ ですし, 2 を何乗かして 1/2 にしたいと思うなら, -1 乗すれば良いので, $\log_2(1/2) = -1$ となるわけです.

また重要なこととして, すべての正の数 $a\ (\neq 1)$ について, $a^0 = 1$, $a^1 = a$ ですから,

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

が成り立ちます.

3.2 対数法則

指数法則を対数の言葉で読み替えることにより, 次のようなことが成り立ちます. a, M, N を正の数, $a \neq 1$, r を任意の実数とするとき,

	対数法則	対応する指数法則
(i)	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$	$a^x a^y = a^{x+y}$
(ii)	$\log_a \dfrac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$	$\dfrac{a^y}{a^x} = a^{y-x}$
(iii)	$\log_a M^r = r\log_a M$	$(a^x)^y = a^{xy}$.

この対数法則を使いこなせるようになると, 対数の計算は非常に楽になってきます. 特に, $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.30$, $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.48$ などの代表的な対数の値を覚えておくと, これをもとにして, 実にいろいろな対数を計算することができます. 例えば, $\log_{10} 5$ が

$$\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \fallingdotseq 1 - 0.3 = 0.7$$

と計算できますし, さらにこれをもとにして,

$$\log_{10} 125 = \log_{10} 5^3 = 3\log_{10} 5 \fallingdotseq 2.1, \qquad \log_{10}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\log_{10} 5 \fallingdotseq 0.35$$

等々の計算もできるわけです.

対数法則の中で最も重要なものを一つ選ぶとすれば, (i) が最も重要です. 大雑把な言い方をすれば「積の計算が和の計算になってしまう」ということですが, 掛け算よりは足し算の方がやりやすいので計算上とても助かるというわけです. また逆に, 底が共通する二つの対数の足し算引き算を整理して一まとめにしたい時に使うことがあります. 例えば,

$$\log_a(x+1) + \log_a(x-1) = \log_a(x+1)(x-1), \quad \log_a x - \log_a(x+1) = \log_a\frac{x}{x+1}$$

のように式を整理したりできる, ということも重要なので覚えておいてください.

3.3 よく使う対数

実は, 工学で実際に用いられている対数は, たいていの場合, 常用対数 ($\log_{10}$), 自然対数 ($\log_e$), それから $\log_2$, のうちのどれかです. これら三つ以外の対数に出会うことは殆どないと思います. それぞれの来歴や応用について, ここで大雑把にまとめておきます.

常用対数 ($\log_{10}$). ネーピアが対数について発表したのは 1614 年のことですが, その直後にネーピアの業績を知って感銘を受けた **ブリッグス** (Briggs) という人物が対数の普及に大きな貢献をすることになります. 彼はネーピアの家を訪ねて話し合い, 今日でいうところの**常用対数** ($\log_{10}$) を使おうということで合意に達しました[1]. その時ネーピアは既に老齢 (1617 年に死去) だったこともあり, 常用対数の研究はブリッグスに引き継がれて, この人が世界最初の常用対数表を作ることになります. 何事も最初にやるというのは大変なことで, 当時は常用対数表を作るのにいろいろな工夫が必要だったと思うのですが, 現在ではそのような工夫は「数値計算」という学問分野に含まれています. 関数電卓でポンポンと常用対数を計算できるのも, 数値計算の発展の賜物です.

常用対数がよく使われる理由は, このように最初に普及した対数であるという歴史的な事情と, 普段我々が数の計算を 10 進法で行っているということにあります. 例えば, a を正整数とするとき, $\log_{10} a$ の整数部分に 1 を足したものは 10 進法の桁数に対応します:

$$\log_{10} 123 = 2.089..., \qquad \log_{10} 1234 = 3.091..., \qquad \log_{10} 54321 = 4.734...$$

例えば 1234 は 4 桁の数ですが, これは $\log_{10} 1234$ の整数部分の 3 に 1 を足したものに対応しているわけです. もうすこし正確に言うと, $a = x \times 10^n$ ($1 \leqq x < 10$, n は整数) という形で書いたとき $n+1$ が桁数になりますが,

$$\log_{10}(x \times 10^n) = \log_{10} x + \log_{10} 10^n = n + \log_{10} x \qquad (0 \leqq \log_{10} x < 1)$$

なので, 常用対数をとって整数部分に 1 を足すと桁数が出てくるというわけです.

自然対数 ($\log_e$). 自然対数もかなり早い時期から考えられていたらしいのですが, 重要性が認識されるようになったのはおそらく微分積分が発達した後のことだと思います. 底としては

$$e = 2.718... \quad \left(= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \leftarrow \text{正確にはこう定義する}\right)$$

が用いられます. この数は**ネーピア数**, または単に, **自然対数の底**と呼ばれています.

[1] ネーピアが最初に発表した対数というのは現在のものとは少し異なるものでした.

微分積分では e を底とする指数関数・対数関数 (e^x や $\log_e x$) が最も自然なふるまいをするのですが, 特に, 微分方程式の解を表すときや分数関数の積分を考えるときによく使います. だから, そのように理論的に指数関数・対数関数を扱う場合には e^x や $\log_e x$ が最もよく用いられています. 後でも説明しますが, 例えば数学書や物理学書などで, 底を省略した $\log x$ が特に断りなく用いられていたら, それは自然対数の意味です.

2 を底とする対数 ($\log_2$). これは情報理論で情報量をビット (bit) 単位で表すときなどに用いられています. 「情報量」という言葉にはあまりなじみがないかもしれませんが, パソコンを使う人ならば, ハードディスクの容量とか, メモリの容量などで日常的に使っているものです[2]. 例えば銀行の暗証番号 (0000 〜 9999) の情報量は, 一件につき $\log_2 10000$ [bit] となります. これは $\log_2 10 = 3.32...$ を用いれば,

$$\log_2 10000 = 4 \log_2 10 = 13.28... \quad [\mathrm{bit}]$$

と計算できます. ただし, 電子情報の場合は原理的に整数 bit しか扱えないので, 実際には 14 bit の情報として扱います. これは, 10000 を 2 進法で表記すると 14 桁になるということでもあります[3]. つまり, 銀行の暗証番号を電子情報としてやりとりするには, 一件につき最低 14 bit の容量を確保しておく必要があるというわけです. (実際には暗号化するなどデータを加工することが多いので, もっと必要になるでしょうが.)

底の省略について. よく使う対数は何度も書くことになるわけですが, だんだん底の部分をいちいち書くのがおっくうになってくるので, 底を省略して $\log x$ などと書くことがあります. どの底が省略されるのかは, その人 (達) がどの対数を一番良く使うのかという事情と一般的な慣例との兼ね合いで決まっているみたいです.

(1) まず, 自然対数の底を省略するというのが最も影響力のある慣例です. 「これこれの底を省略します」という断り書きなしで底が省略されているときには, まず自然対数だと思って間違いありません. 数学書の場合, 自然対数の底を明記するほうが珍しいくらいです.

(2) 次に影響力のある慣例は, 常用対数の底を省略して $\log x$ と書き, 自然対数は $\ln x$ と表すというものです. 例えば, 関数電卓の表記がこれにあたります. $\boxed{\log}$ のキーが常用対数で, $\boxed{\ln}$ のキーが自然対数であるわけです.

(3) 情報理論の本には $\log_2$ の底を省略しているものがあります. しかしその場合には本のどこかに必ず断り書きがあるはずなので, それを探しましょう.

---

[2] この場合はバイト (byte, または B) という単位の方がよく用いられますが, 1 byte = 8 bit です.

[3] 10 進数を 2 進数で表すには, $10000 = 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^4 \to 10011100010000$ のような計算が必要になるのですが, そんなことをしなくても, 情報量だけ計算したい場合には対数計算だけでできるというわけです.

3.4 底の変換公式

関数電卓で対数を計算するキーには, 常用対数を計算する $\boxed{\log}$ と, 自然対数を計算する $\boxed{\ln}$ があるわけですが, この二つ以外の対数を計算するキーというのはありません. そうすると先程までの話の流れからいって, 「じゃあ $\log_2$ はどうやって計算するんだ?」という疑問が起こってくると思いますが, どうやって計算するのかというと, 次の「底の変換公式」を使います: a, b, x を正の数, a, b は 1 でない, とするとき,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

上の式で $b = 10$ とすれば,

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$$

となります. 例えば $a = 2$ のとき, 関数電卓で左辺を一発で計算するということはできないのですが, 右辺は $\boxed{\log}$ や $\boxed{1/x}$ のキーなどを使えば計算することができるわけです. 例えば前頁に出てきた $\log_2 10$ は,

$$\log_2 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log_{10} 2} = 3.32...$$

として計算したものです.

また次のように, 底が不ぞろいな幾つかの対数が混じっている式に出くわしたら, 変換公式を使って底を揃えましょう:

$$\frac{(\log_2 5) \cdot (\log_3 36) \cdot (\log_5 27)}{\log_2 6} = \frac{\dfrac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 2}} \cdot \overset{2}{\cancel{\log_3 6^2}} \cdot \dfrac{\overset{3}{\cancel{\log_3 3^3}}}{\cancel{\log_3 5}}}{\dfrac{\cancel{\log_3 6}}{\cancel{\log_3 2}}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

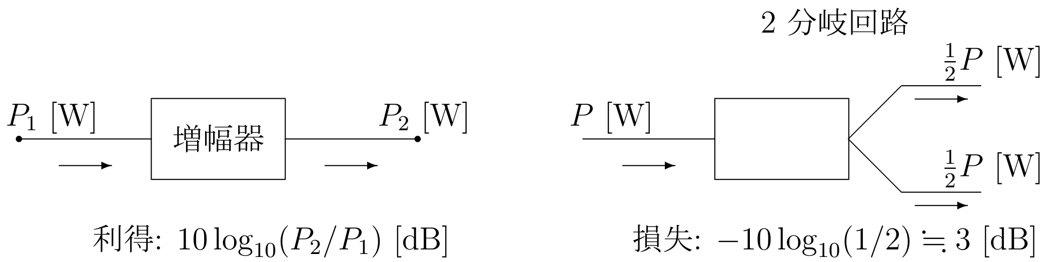
なんとなく底を 3 で揃えると楽そうだったので, ここでは上のようにやりましたが, 揃える底はなんでもかまいません. 例えば, 底を 10 にして揃えても良いでしょう (やってみたらそれでもうまくいきました. 良かったら試してみてください).

3.5 デシベルという単位

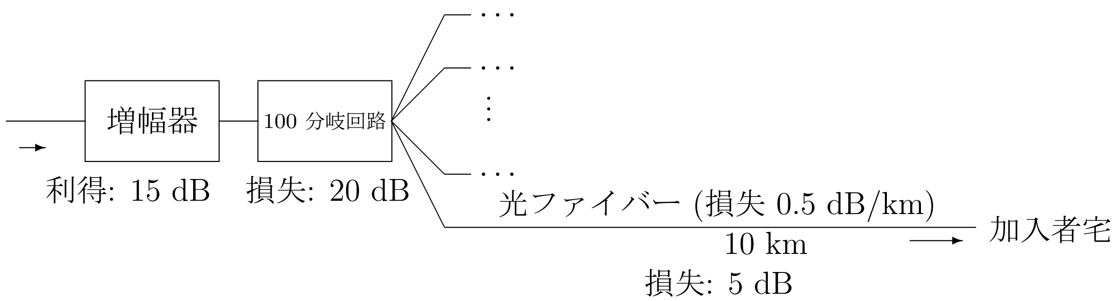
増幅器 (アンプ) などの入力電力を P_1 [W], 出力電力を P_2 [W] とするとき, 両者の相対的な差異を表す量として, **電力利得**が

$$\text{電力利得} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} P_2 - 10 \log_{10} P_1 \quad [\text{dB}]$$

として定義されます. 単位は dB (デシベル) を使います. ただし, $P_1 > P_2$ のときにはこの値は負になるわけですが, そういう場合は「利得」とは言わずに, マイナスをとって「減衰」とか「損失」ということの方が多いです.



例えばケーブルテレビなどで, 次のような通信路があったとしましょう:



そうすると, この通信路の伝送損失は, $-15 + 20 + 5 = 10$ [dB] となるわけです.

また, 1 mW (ミリワット) を基準として, 電力の絶対量を dBm (ディービーエム) で表すことがあります. P [mW] の電力を dBm で表した値は,

$$10\log_{10} P \quad [\mathrm{dBm}]$$

となります. こうしておくと, 例えば上の通信路の入力電力が 20 [dBm] であったら, 出力電力は $20 - 10 = 10$ [dBm] となる, という風に計算がしやすくなります.

それから, 電圧比の対数をとる**電圧利得**も dB で表されますが, 電圧の場合は, 「電力比は電圧比の 2 乗になる」ということから, $20\log_{10}(E_2/E_1)$ のように, 常用対数をとった後で **20 倍**します. (ただし, 実際には電力比が電圧比の 2 乗にならないようなとき[4]であっても, 電圧比を表す dB は常に 20 倍のまま計算することが慣例になっているようです.)

[4]入力インピーダンスと出力インピーダンスが等しくないような場合