期末試験問題

K を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とし, $M(m,n;K)$ を K の元を成分とする $m\times n$ 行列全体のなすベクトル空間とする.

問題 1 次のベクトル空間の基底を 1 組求めよ[1].

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; c_1 + c_2 + c_3 = 0 \right\}$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M(2,3;K) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{11} = a_{12} - a_{13} + a_{22} \\ a_{21} = a_{22} + 2a_{23} \end{array} \right\}$

問題 2 次の写像 $\varphi, \psi : M(2,2;K) \to M(2,2;K)$ が線形写像かどうかをそれぞれ判定せよ (判定理由も添えて).

(1) $\varphi : X \mapsto (\det X)E$ 　 (E は単位行列)

(2) $\psi : X \mapsto X + {}^tX$ 　 (${}^tX$ は X の転置行列)

問題 3 $\mathbb{R}[x]_2$ を実係数の 1 変数多項式で次数が 2 以下のもの全体のなすベクトル空間とし, 線形写像 $\varphi, \psi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を次により定める:

$$\begin{aligned} \varphi &: f(x) \mapsto f'(x) \\ \psi &: f(x) \mapsto (2x-1)f'(x) - 2f(x) \end{aligned}$$

(1) φ および ψ の, 基底 $1, x, x^2$ に関する表現行列を求めよ.

(2) 合成写像 $\psi \circ \varphi$ の, 基底 $1, x, x^2$ に関する表現行列を求めよ.

(3) $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$ および $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

[1]「基底になることの証明」は書かなくても良いです