

## 期末試験の解答例

問題 1 (1)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2 (1) 例えば  $\varphi(2E) = 4E \neq 2\varphi(E)$  だから,  $\varphi$  は線形写像ではない.

(2) 任意の  $X, Y \in M(2, 2; K), c \in K$  に対して,

$$\psi(X+Y) = (X+Y) + {}^t(X+Y) = X+Y + {}^tX + {}^tY = (X + {}^tX) + (Y + {}^tY) = \psi(X) + \psi(Y),$$

$$\psi(cX) = cX + {}^t(cX) = cX + c({}^tX) = c(X + {}^tX) = c\psi(X)$$

となるので,  $\psi$  は線形写像である.

問題 3 (1)  $\varphi(1) = 0, \varphi(x) = 1, \varphi(x^2) = 2x$  より,  $\varphi$  の  $1, x, x^2$  に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

また,  $\psi(1) = -2, \psi(x) = -1, \psi(x^2) = -2x + 2x^2$  より  $\psi$  の  $1, x, x^2$  に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)  $\psi \circ \varphi$  の  $1, x, x^2$  に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) まず  $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  について,

$$(\psi \circ \varphi)(c_0 + c_1x + c_2x^2) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -2c_1 - 2c_2$$

となる.

$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$  とすると,

$$f(x) \in \text{Ker}(\psi \circ \varphi) \Leftrightarrow -2c_1 - 2c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1.$$

よって,  $\text{Ker}(\psi \circ \varphi) = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 \mid c_2 = -c_1\} = \langle 1, x - x^2 \rangle$  であり,  $1, x - x^2$  は  $\text{Ker}(\psi \circ \varphi)$  の基底である.

また,  $\text{Im}(\psi \circ \varphi) = \{-2c_1 - 2c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}\} = \langle 1 \rangle$  で,  $1$  が  $\text{Im}(\psi \circ \varphi)$  の基底となる.