10　線形微分方程式の多項式解

ここまで学んできたことを応用して, 線形微分方程式の多項式解を求めてみます.

演習 10.1 $V = \mathbb{R}[x]$ を実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間とし, $V_n = \mathbb{R}[x]_n$ を次数が n 以下の多項式全体のなす V の部分空間とする.

V から V への写像 φ を

$$\varphi : f(x) \mapsto (x^2+1)f''(x) - 3xf'(x) + 3f(x)$$

により定めると, これは線形写像になる.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (x^2+1)f''(x) - 3xf'(x) + 3f(x) = 0\}$$

だから, $\operatorname{Ker}\varphi$ は微分方程式 $(x^2+1)y' - 3xy' + 3y = 0$ の (実数係数) 多項式解全体のなすベクトル空間である.

V は無限次元のベクトル空間なので, φ を行列表示することはできないが, 次のようにして $\operatorname{Ker}\varphi$ を求めることができる.

(1) $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ $(c_n \neq 0)$ とするとき, $\varphi(f(x))$ は n 次以下の多項式になることを示し, $\varphi(f(x))$ の x^n の項の係数を n や $c_0, \ldots, c_n$ を使って表せ.

(2) 上記の結果を使って $\operatorname{Ker}\varphi \subset V_3$ となることを証明せよ.

(3) φ を V_3 に制限した写像を $\psi : V_3 \to V_3$ とする (つまり, $f \in V_3$ に対し $\psi(f(x)) = \varphi(f(x))$ とする). このとき V_3 の基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する ψ の表現行列を求めよ.

(4) $\operatorname{Ker}\psi$ $(= \operatorname{Ker}\varphi)$ の基底を求めよ.