# 10 線形微分方程式の多項式解 の解答例

**演習 10.1** (1) まず, 各 $n$ について $\varphi(x^n)$ がどうなるかを調べる. $n \geq 2$ のとき,

$$\varphi(x^n) = (x^2+1)n(n-1)x^{n-2} - 3xnx^{n-1} + 3x^n = (n-3)(n-1)x^n + n(n-1)x^{n-2}.$$

$n = 1$ のときは $\varphi(x) = 0$, $n = 0$ のときは $\varphi(1) = 3$ となる. 従って, $\varphi(x^n)$ は常に $n$ 次以下の多項式となる. $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ とするとき, $\varphi$ は線形写像だから,

$$\varphi(f(x)) = c_0\varphi(1) + c_1\varphi(x) + \cdots + c_n\varphi(x^n)$$

となり, 上記より各 $\varphi(1), \varphi(x), \ldots, \varphi(x^n)$ はすべて $n$ 次以下の多項式だから, $\varphi(f(x))$ も $n$ 次以下の多項式である. また, $\varphi(1), \varphi(x), \ldots, \varphi(x^n)$ のうち $x^n$ の項を含む (可能性がある) のは $\varphi(x^n)$ のみだから, $\varphi(f(x))$ の $x^n$ の項の係数は $c_n\varphi(x^n)$ のそれと一致する. よって求める係数は

$$\begin{cases} 3c_0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ (n-3)(n-1)c_n & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる.

(2) $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ $(c_n \neq 0)$ とおく. もし $\varphi(f(x)) = 0$ であるなら, とくに $\varphi(f(x))$ の $x^n$ の項も $0$ であるはず. しかし $n \geq 4$ のときは $(n-3)(n-1)c_n \neq 0$ となってしまうから, $\varphi(f(x)) = 0$ となるためには少なくとも $n \leq 3$ でなければならない. 言い換えれば, $\operatorname{Ker}\varphi$ の元はすべて $3$ 次以下の多項式である. よって $\operatorname{Ker}\varphi \subset V_3$.

(3) $\psi(1) = 3$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x^2) = 2 - x^2$, $\psi(x^3) = 6x$ だから, 求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ とすると,

$$\begin{aligned} \psi(f(x)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_0 + 2c_2 &= 0 \\ 6c_3 &= 0 \\ -c_2 &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad c_0 = c_2 = c_3 = 0. \end{aligned}$$

よって $\operatorname{Ker}\psi = \{c_1 x \mid c_1 \in \mathbb{R}\} = \langle x \rangle$ であり, $x$ がその基底である.