9 線形写像と行列 (その 4)

演習 9.1 $V = \mathbb{R}[x]_2$ を実数係数の 1 変数多項式で次数が 2 以下のもの全体のなすベクトル空間とする. V から V への線形写像

$$\varphi : c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \mapsto (c_0 + 2c_1 + c_2) + (-c_0 + 4c_1 + c_2)x + (2c_0 - 4c_1)x^2$$

について, 次に答えよ.

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = x$, $\boldsymbol{v}_3 = x^2$ に関する φ の表現行列 A を求めよ.
(2) $\boldsymbol{v}'_1 = 1 + x^2$, $\boldsymbol{v}'_2 = x - 2x^2$, $\boldsymbol{v}'_3 = 1 + x - 2x^2$ が V の基底になることを確かめよ.
(3) 基底 $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$, $\boldsymbol{v}'_3$ に関する φ の表現行列 B を求めよ.
(4) $(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)P$ となる基底の変換行列 P を求め, $B = P^{-1}AP$ となることを確かめよ.

(基礎事項) A は

$$(\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)A$$

を満たす行列であり, B は

$$(\varphi(\boldsymbol{v}'_1), \varphi(\boldsymbol{v}'_2), \varphi(\boldsymbol{v}'_3)) = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3)B$$

を満たす行列です. $(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)P$ となる基底の変換行列 P をとると, φ の線形性により $(\varphi(\boldsymbol{v}'_1), \varphi(\boldsymbol{v}'_2), \varphi(\boldsymbol{v}'_3)) = (\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3))P$ も成り立つので,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)PB &= (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3)B \\
&= (\varphi(\boldsymbol{v}'_1), \varphi(\boldsymbol{v}'_2), \varphi(\boldsymbol{v}'_3)) \\
&= (\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3))P \\
&= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)AP
\end{aligned}$$

となり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が線形独立なので, $PB = AP$, 従って, $B = P^{-1}AP$ となるわけです.

※ 今回は特別扱いの問題はありません.