9　線形写像と行列 (その 4) の解答例

演習 9.1 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{v} = c_1'\boldsymbol{v}_1' + c_2'\boldsymbol{v}_2' + c_3'\boldsymbol{v}_3'$ $(c_1', c_2', c_3' \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\boldsymbol{v} = (c_1' + c_3') + (c_2' + c_3')x + (c_1' - 2c_2' - 2c_3')x^2$$

だから,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1' + c_3' = 0 \\ c_2' + c_3' = 0 \\ c_1' - 2c_2' - 2c_3' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1' = c_2' = c_3' = 0.$$

よって $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3'$ は線形独立である. そして $\dim V = 3$ だから, この 3 つは V の基底をなすことが分かる.

(3) 計算すると

$$\varphi(\boldsymbol{v}_1') = 2v_1', \quad \varphi(\boldsymbol{v}_2') = 2\boldsymbol{v}_2', \quad \varphi(\boldsymbol{v}_3') = \boldsymbol{v}_3'$$

となるので,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$ だから, 変換行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

となる. P^{-1} を計算して $P^{-1}AP$ を求めると,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

となって, 確かに $P^{-1}AP = B$ が成立している.