

8 線形写像と行列 (その 3)

演習 8.1 $V = M(2, \mathbb{R})$ を 2×2 の実正方行列全体のなすベクトル空間とする. 次で与えられる写像 φ が線形写像かどうかを判定せよ (理由も添えて).

(1) $\varphi: V \ni X \mapsto {}^tX \in V$ (tX は X の転置行列)

(2) $\varphi: V \ni X \mapsto X^2 \in V$

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ を一つ決めておいて,

$$\varphi: V \ni X \mapsto AX - XA \in V$$

とする

(4) $\varphi: V \ni X \mapsto (\det X)E \in V$ (E は単位行列)

演習 8.2 上記の演習 8.1 において線形写像であると判断したものについて, V の基底

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に関する表現行列を求めよ.

時間が余った人は次の問題も考えてみてください.

演習 8.3 $\mathbb{R}[x]_3$ を実数係数の 1 変数多項式で次数が 3 以下のもの全体のなすベクトル空間とする.

(1) $\varphi: \mathbb{R}[x]_3 \ni f(x) \mapsto f''(x) + f'(x) - 2f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ が線形写像であることを確かめよ.

(2) 上記の φ の, 基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する表現行列を求めよ.