8 線形写像と行列 (その 3) の解答例

演習 8.1 (1) 任意の $X_1, X_2 \in V$, $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\varphi(X_1+X_2) = {}^t(X_1+X_2) = {}^tX_1 + {}^tX_2 = \varphi(X_1)+\varphi(X_2),$$
$$\varphi(cX_1) = {}^t(cX_1) = c\,{}^tX_1 = c\varphi(X_1)$$

となるので, φ は線形写像である.

(2) $\varphi(2E) = (2E)(2E) = 4E \ (\neq 2\varphi(E) = 2E)$ だから, φ は線形写像でない.

(3) 任意の $X_1, X_2 \in V$, $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\varphi(X_1+X_2) &= A(X_1+X_2)-(X_1+X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) \\
&= \varphi(X_1)+\varphi(X_2), \\
\varphi(cX_1) &= A(cX_1)-(cX_1)A = c(AX_1 - X_1A) = c\varphi(X_1)
\end{aligned}$$

となるので, φ は線形写像である.

(4) $\varphi(2E) = (\det(2E))E = 4E \ (\neq 2\varphi(E) = 2E)$ だから, φ は線形写像でない.

演習 8.2 (1) $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3), \varphi(\boldsymbol{v}_4)$ をそれぞれ求めると,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{v}_1 \\
\varphi(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{v}_3 \\
\varphi(\boldsymbol{v}_3) &= \boldsymbol{v}_2 \\
\varphi(\boldsymbol{v}_4) &= \boldsymbol{v}_4
\end{aligned}$$

だから, φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

(2) $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3), \varphi(\boldsymbol{v}_4)$ をそれぞれ求めると,

$$\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3$$

$$\varphi(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -c\boldsymbol{v}_1 + (a-d)\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_4$$

$$\varphi(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_1 + (d-a)\boldsymbol{v}_3 - b\boldsymbol{v}_4$$

$$\varphi(\boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_2 - c\boldsymbol{v}_3$$

だから, φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

演習 8.3 (1) 任意の $f, g \in \mathbb{R}[x]_3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} &\varphi(f+g) = (f+g)'' + (f+g)' - 2(f+g) = (f'' + f' - 2f) + (g'' + g' - 2g) = \varphi(f) + \varphi(g), \\ &\varphi(cf) = (cf)'' + (cf)' - 2(cf) = c(f'' + f' - 2f) = c\varphi(f) \end{aligned}$$

となるので, φ は線形写像である.

(2) $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ とすると,

$$\varphi(f) = (-2c_0 + c_1 + 2c_2) + (-2c_1 + 2c_2 + 6c_3)x + (-2c_2 + 3c_3)x^2 + (-2c_3)x^3.$$

よって, 基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる.