7　部分空間の和と直和 の解答例

演習 7.1, 7.2 ともに, $\dim W_1$ と $\dim W_2$ を求めた後[1], 次の 2 通りの解き方があります .

(A) W の基底を求めて次元を計算する. そして $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W$ (の右辺) を計算してこれが 0 ならば $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であることが分かり, $W_1 + W_2$ は直和である. 逆に 0 でなければ直和でない.

(B) $W_1 \cap W_2$ を求めて次元を計算する (このときもし $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であれば $W_1 + W_2$ は直和で, そうでなければ直和でない). そして W の次元は公式 $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ を使って求める.

それぞれの問題について, これら 2 通りの解答例を記しておきます. もちろん, (A), (B) をあわせて W と $W_1 \cap W_2$ の両方を具体的に求めても良いです.

演習 7.1 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので, 実は $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と書ける. この 2 つの生成元は線形独立なので, これらが W_1 の基底をなし, 従って $\dim W_1 = 2$ を得る. また, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が線形独立なので, これらは W_2 の基底をなし, $\dim W_2 = 2$ であることが分かる.

(A) $W = W_1 + W_2$ は両方の基底を合わせて

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と書ける. しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, 実は

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (= K^3)$$

[1]ただし, 演習 7.1 (3) に関しては $W_1 \subset W_2$ であることが先に分かれば $\dim W_1$ を計算する必要はありません

と書け, この 3 つの生成元は線形独立なので, W の基底をなし, 従って $\dim W = 3$ であることが分かる. また, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W = 2+2-3 = 1 \neq 0$ だから, $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ であり, 従って $W_1 + W_2$ は直和ではない.

(B) $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$ について,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = d_2, \\ c_1 - c_2 = 0, \\ c_2 = d_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = d_1 = d_2$$

より, $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $({}^\exists c \in K)$. すなわち, $W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となることが分かる. よって, $W_1 + W_2$ は直和でない. また, W の次元は

$$\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

と計算できる.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立なので, これらが W_1 の基底をなし, 従って $\dim W_1 = 2$ を得る. また, W_2 は $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ と書けるので, $\dim W_2 = 1$ であることが分かる.

(A) W_1, W_2 の基底を合わせれば, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ と書ける. この 3 つの生成元は線形独立なので W の基底をなし, 従って $\dim W = 3$ であることが分かる. よって, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W = 2 + 1 - 3 = 0$ だから, $W_1 + W_2$ は直和である.

(B) $\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1$ とおくと,

$$\boldsymbol{x} \in W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2c_1 + c_2) + c_1 = 0, \\ c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

となるので, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であることが分かる. よって, $W_1 + W_2$ は直和である. また, W の次元は $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = 3$ と計算できる.

(3) 連立方程式を解くと $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ と書けることが分かるので, $\dim W_1 = 1$ である. また, 同様に, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ と書け, この 2 つの生成元が W_2 の基底をなすので, $\dim W_2 = 2$ を得る.

(A) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので, 実は $W_1 \subset W_2$ であることが分かる. よって, $W = W_1 + W_2 = W_2$ で, $\dim W = \dim W_2 = 2$ である. $W_1 \cap W_2 = W_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ だから, $W_1 + W_2$ は直和でない.

(B) 等式 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ の両辺を 2 倍して等式 $2x_2 - x_3 = 0$ を足せば $2x_1 + x_3 = 0$ を得るので, 実は $W_1 \subset W_2$ であることが分かる. よって $W_1 \cap W_2 = W_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ で, $W_1 + W_2$ は直和でない. また, $W = W_2$ となるから, $\dim W = \dim W_2 = 2$.

演習 7.2 (1) $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]_4$ $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$ とすると,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

だから, $W_1 = \langle 1,\ x \rangle$ であることが分かる. $1, x$ は線形独立だから W_1 の基底をなし, 従って $\dim W_1 = 2$ を得る. また,

$$xf''(x) - 2f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2c_1 - 2c_2 x + 4c_4 x^3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_4 = 0$$

だから, $W_2 = \langle 1,\ x^3 \rangle$ であることが分かる. $1, x^3$ は線形独立だから W_2 の基底をなし, 従って $\dim W_2 = 2$ を得る.

(A) $W = W_1 + W_2 = \langle 1,\ x,\ x^3 \rangle$ で, $1, x, x^3$ は線形独立だから W の基底をなし, 従って $\dim W = 3$ である. また, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W = 2 + 2 - 1 = 1$ より $\dim(W_1 \cap W_2) \neq \{\mathbf{0}\}$. よって, $W_1 + W_2$ は直和ではない.

(B) $W_1 \cap W_2 = \langle 1 \rangle$ となるので, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. よって $\dim(W_1 \cap W_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ で, $W_1 + W_2$ は直和ではない. また, W の次元は $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$ となる.

(2) まず, 明らかに $\dim W_1 = 2$. また, $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]_4$ $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \frac{c_3}{4}x^4 + \frac{c_4}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{5}c_4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c_0 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{5}c_4 = 0
\end{aligned}$$

より, $W_2 = \langle x,\ x^3,\ 1-5x^4,\ 1-3x^2 \rangle$ であることが分かる．これら 4 つの生成元は線形独立なので W_2 の基底をなし, 従って $\dim W_2 = 4$ を得る.

(A) W_1, W_2 の基底を合わせると $W = W_1 + W_2 = \langle 1,\ x^2,\ x,\ x^3,\ 1-5x^4,\ 1-3x^2 \rangle$ と書けるが, $1-3x^2$ は 1 と x^2 との線形結合で書けているので, 実は $W = \langle 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ 1-5x^4 \rangle$ となる．この 5 つの生成元は線形独立だから, $\dim W = 5$ である．また, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W = 2+4-5 = 1$ だから, $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ であり, $W_1 + W_2$ は直和でない.

(B) $f(x) = c_0 + c_2 x^2 \in W_1$ $(c_0, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow c_0 + \frac{1}{3}c_2 = 0$$

だから, $W_1 \cap W_2 = \langle 1-3x^2 \rangle \neq \{\mathbf{0}\}$. よって $W_1 + W_2$ は直和ではない．また, W の次元は $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2+4-1 = 5$ と計算できる.