6　ベクトル空間の次元 の解答例

演習 6.1 (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立[1]なので, これら 3 つの元で W の基底をなす. よって $\dim W = 3$.

(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから, 実は $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. よって, $\dim W = 1$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立なので, これら 3 つの元で W の基底をなす. よって $\dim W = 3$.

演習 6.2 (1) $1 + x^2 = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) + x^2$ より, 実は $W = \langle 1-x,\ 1+x,\ x^2 \rangle$ と書ける. さらに, $1-x, 1+x, x^2$ は線形独立なので, これら 3 つの元で W の基底をなす. よって $\dim W = 3$.

(2) $1, x^2, (1+x)^2$ は線形独立なので, これら 3 つの元で W の基底をなす. よって $\dim W = 3$.

(3) $(1-x)^2 = (-2)x + (1+x^2)$, $(1+x)^2 = 2x + (1+x^2)$ より, 実は $W = \langle x,\ 1+x^2 \rangle$ と書ける. さらに, $x, 1+x^2$ は線形独立なので, これら 2 つの元で W の基底をなす. よって $\dim W = 2$.

[1] 線形独立性の確認作業は省略します (以下同様) が, 返却された答案に赤で指摘されている人はちゃんと確認しておいてください.