

## 5 ベクトル空間とその基底 (その 2)

今回は前回よりも抽象度の高いベクトル空間を考えてみます.

演習 5.1  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数の全体がなす集合を  $C(\mathbb{R})$  と書く.  $f, g \in C(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$  に対して, 和  $f + g$  とスカラー倍  $cf$  を,  $x \in \mathbb{R}$  に対してそれぞれ

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

を対応させる関数として定義すると,  $C(\mathbb{R})$  はベクトル空間になる (ちゃんとベクトル空間になるかどうかは, 前回みたいに解答用紙に書かなくても良いですが, 各自で確認しておいてください). このとき, 次の  $C(\mathbb{R})$  の部分集合がそれぞれ部分ベクトル空間になるかどうかを判定せよ (理由も添えて).

- (1)  $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1\}$ .
- (2)  $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ .
- (3)  $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ または } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty\}$ .
- (4)  $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 有界}^1\}$ .
- (5)  $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ は } \mathbb{R} \text{ で連続的微分可能}^2\}$ .

時間が余った人は, 次も考えてみてください.

演習 5.2  $\mathbb{R}[x]_3$  を実数係数の 1 変数多項式で次数が 3 以下のもの全体のなす集合とすると, (前回の演習でやったように) これはベクトル空間になる. さらに,  $\mathbb{R}[x]_3$  の部分集合  $W$  を

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid x^2 f''(x) - x f'(x) = 0\}$$

により定める.

- (1)  $W$  が  $\mathbb{R}[x]_3$  の部分ベクトル空間になることを示せ.
- (2)  $W$  の基底を 1 組求めよ.

<sup>1</sup>ある正の数  $M$  が存在して,  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して  $|f(x)| < M$

<sup>2</sup>微分可能, かつ, 導関数  $f'$  が連続関数