5 ベクトル空間とその基底（その２）の解答例

演習 5.1 (1) $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to 0} f(x) = 1\}$ とおく．$f(x) = x + 1$ とおくと $f \in W$ であるが，$\lim_{x\to 0} 2f(x) = 2$ だから，$2f \notin W$．よって W は部分ベクトル空間ではない．

(2) $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ とおく．任意の $f, g \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 + 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty}(cf)(x) = \lim_{x\to\infty} cf(x) = c\lim_{x\to\infty} f(x) = c \cdot 0 = 0$$

となるから，$f + g \in W$, $cf \in W$ を得る．よって W は部分ベクトル空間である．

(3) $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ または } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\}$ とおく．$f(x) = x$, $g(x) = -x$ とおくと，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ より $f, g \in W$ であるが，

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\infty}(x - x) = 0$$

だから，$f + g \notin W$．よって W は部分ベクトル空間ではない．

(4) $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 有界 }\}$ とおく．任意の $f, g \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる．このとき，ある正の数 M, N が存在して ${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $|f(x)| < M$, $|g(x)| < N$ となるから，

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < M + N \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}),$$
$$|(cf)(x)| = |cf(x)| = |c||f(x)| < |c|M \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

を得る．よって $f + g \in W$, $cf \in W$．以上より，W は部分ベクトル空間である．

(5) 任意の $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ をとる．このとき f, g が $\mathbb{R}$ で連続なので $f + g$ も連続である．また，f', g' が $\mathbb{R}$ で連続なので，$(f+g)' = f' + g'$ も連続である．従って，$f + g$ は $\mathbb{R}$ で連続的微分可能であるので，$f + g \in C^1(\mathbb{R})$．さらに，任意の $c \in \mathbb{R}$ をとると，f の連続性から cf の連続性もいえて，$(cf)' = cf'$ と f' の連続性により $(cf)'$ の連続性も分かる．よって cf も $\mathbb{R}$ で連続的微分可能なので，$cf \in C^1(\mathbb{R})$．以上より，$C^1(\mathbb{R})$ は部分ベクトル空間である．

注意 1. 演習 5.1 (3) の説明で「$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ のとき，$\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x))$ は ∞ でも $-\infty$ でもない」と書いている人が何人かいたのですが，これは一般論としては正しくありません (例えば $f(x) = 2x$, $g(x) = -x$ のとき)．

演習 5.2 (1) 任意の $f, g \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる．このとき $x^2 f''(x) - xf'(x) = 0$, $x^2 g''(x) - xg'(x) = 0$ より，

$$\begin{aligned} x^2(f+g)''(x) - x(f+g)'(x) &= x^2 f''(x) + x^2 g''(x) - xf'(x) - xg'(x) \\ &= (x^2 f''(x) - xf'(x)) + (x^2 g''(x) - xg'(x)) = 0, \\ x^2(cf)''(x) - x(cf)'(x) &= cx^2 f''(x) - cxf'(x) = c(x^2 f''(x) - xf'(x)) = 0. \end{aligned}$$

従って, $f + g \in W$, $cf \in W$. 以上より, W は部分ベクトル空間である.

(2) 任意の $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \in \mathbb{R}[x]_3$ をとると,

$$x^2 f''(x) - xf'(x) = -c_1 x + 3c_3 x^2$$

となるから,

$$f \in W \Leftrightarrow x^2 f''(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, \quad c_3 = 0.$$

これにより $W = \langle 1, x^2 \rangle$ を得る．また, $a, b \in \mathbb{R}$, $a + bx^2 = 0$ となるのは $a = b = 0$ のときのみだから, $1, x^2$ は線形独立である．以上より, $1, x^2$ は W の基底である.