4　ベクトル空間とその基底

K を実数全体 $\mathbb{R}$ または 複素数全体 $\mathbb{C}$ とする.

演習 4.1 K の元を成分とする 2×3 行列全体のなす集合を $M(2,3;K)$ とする.
(1) $M(2,3;K)$ は行列の和とスカラー倍に関してベクトル空間になることを示せ.
(2) $M(2,3;K)$ の基底を 1 組求めよ.
(3) $M(2,3;K)$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in M(2,3;K) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11} = x_{12} + x_{13} \\ x_{21} = x_{22} + x_{23} \\ x_{13} = -x_{23} \end{array} \right\}$$

により定めれば, これは $M(2,3;K)$ の部分ベクトル空間であることを示せ.
(4) 上記の W の基底を 1 組求めよ.

演習 4.2 $K[x]_3$ を, K 係数の 1 変数多項式で次数が 3 以下のもの全体のなす集合とする. すなわち,

$$K[x]_3 = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \mid c_0, c_1, c_2, c_3 \in K\}.$$

(1) $K[x]_3$ がベクトル空間になることを確かめよ.
(2) 1, $x-1$, $(x+1)^2$, $x^3 - 1$ が $K[x]_3$ の基底であることを示せ.

※ 今回は追加点対象の問題はありません.