4　ベクトル空間とその基底 の解答例

演習 4.1 (1) これは丁寧に書いてくれた人もいれば (明らかだということで?) 何も書いていない人もいましたが, まあ, 各自で下記の事実が (頭の中だけででも) チェックできていればそれで良いです.

・ゼロ元 $\mathbf{0}$ は零行列 O.
・任意の $A, B, C \in M(2,3;K)$, $a, b \in K$ に対して,
(VS1) $(A+B)+C = A+(B+C)$.
(VS2) $A+B = B+A$.
(VS3) $A+O = A$.
(VS4) $A+(-A) = O$.
(VS5) $a(A+B) = aA+aB$.
(VS6) $(a+b)A = aA+bA$.
(VS7) $a(bA) = (ab)A$.
(VS8) $1A = A$.

(2) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば,

(BS1) 任意の 2×3 行列 $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in M(2,3;K)$ に対し,

$$A = x_{11}\boldsymbol{e}_1 + x_{12}\boldsymbol{e}_2 + x_{13}\boldsymbol{e}_3 + x_{21}\boldsymbol{e}_4 + x_{22}\boldsymbol{e}_5 + x_{23}\boldsymbol{e}_6$$

と書ける.

(BS2) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in K$ のとき,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 + c_4\boldsymbol{e}_4 + c_5\boldsymbol{e}_5 + c_6\boldsymbol{e}_6 = O \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

よって, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_6$ は線形独立.

以上より, 基底の定義 (BS1), (BS2) を満たすので, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_6$ は $M(2,3;K)$ の基底である.

(3) 任意の $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \end{pmatrix} \in W$, および任意の $c \in K$ をとる．このとき，

$$\begin{cases} x_{11} = x_{12} + x_{13} \\ x_{21} = x_{22} + x_{23} \\ x_{13} = -x_{23}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_{11} = x'_{12} + x'_{13} \\ x'_{21} = x'_{22} + x'_{23} \\ x'_{13} = -x'_{23}, \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} x_{11} + x'_{11} = (x_{12} + x'_{12}) + (x_{13} + x'_{13}) \\ x_{21} + x'_{21} = (x_{22} + x'_{22}) + (x_{23} + x'_{23}) \\ x_{13} + x'_{13} = -(x_{23} + x'_{23}), \end{cases} \qquad \begin{cases} cx_{11} = cx_{12} + cx_{13} \\ cx_{21} = cx_{22} + cx_{23} \\ cx_{13} = -cx_{23}, \end{cases}$$

を得る．よって，

(SS1)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x'_{11} & x_{12} + x'_{12} & x_{13} + x'_{13} \\ x_{21} + x'_{21} & x_{22} + x'_{22} & x_{23} + x'_{23} \end{pmatrix} \in W.$$

(SS2) $c\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_{11} & cx_{12} & cx_{13} \\ cx_{21} & cx_{22} & cx_{23} \end{pmatrix} \in W.$

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$ とすれば，

(BS1) 任意の $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in W$ に対し，W の定義により，

$$A = \begin{pmatrix} x_{12} - x_{23} & x_{12} & -x_{23} \\ x_{22} + x_{23} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = x_{12}\boldsymbol{v}_1 + x_{22}\boldsymbol{v}_2 + x_{23}\boldsymbol{v}_3$$

と書ける．

(BS2) $c_1, c_2, c_3 \in K$ のとき，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = O \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} c_1 - c_3 & c_1 & -c_3 \\ c_2 + c_3 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は線形独立.

以上より，基底の定義 (BS1), (BS2) を満たすので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は W の基底である．

演習 4.2 (1) これも各自で下記の事実が (頭の中だけででも) チェックできていればそれで良いです．

・ゼロ元 $\mathbf{0}$ は零多項式 0.
・任意の $f(x), g(x), h(x) \in K[x]_3$, $a, b \in K$ に対して,
(VS1) $(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$.
(VS2) $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$.
(VS3) $f(x)+0 = f(x)$.
(VS4) $f(x)+(-f(x)) = 0$.
(VS5) $a(f(x)+g(x)) = af(x)+ag(x)$.
(VS6) $(a+b)f(x) = af(x)+bf(x)$.
(VS7) $a(bf(x)) = (ab)f(x)$.
(VS8) $1f(x) = f(x)$.

(2) (BS1) 任意の $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \in K[x]_3$ をとるとき,

$$f(x) = (c_0 + c_1 - 3c_2 + c_3)1 + (c_1 - 2c_2)(x-1) + c_2(x+1)^2 + c_3(x^3-1)$$

と書ける.

(BS2) $a, b, c, d \in K$ のとき,

$$\begin{aligned} a1 + b(x-1) + c(x+1)^2 + d(x^3-1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (a-b+c-d) + (b+2c)x + cx^2 + dx^3 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a-b+c-d=0 \\ b+2c=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad a=b=c=d=0. \end{aligned}$$

よって, $1, x-1, (x+1)^2, x^3-1$ は線形独立.

以上より, 基底の定義 (BS1), (BS2) を満たすので, $1, x-1, (x+1)^2, x^3-1$ は $K[x]_3$ の基底である.

注意 1. 演習 4.1 (1) や 4.2 (1) において,

(A) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$,

(S) $\boldsymbol{x} \in V, \quad a \in K \Rightarrow a\boldsymbol{x} \in V$

の 2 つしかチェックしていない人がいましたが, 一般にはこの 2 つだけでは V がベクトル空間であるとはいえません. 例えば, $K = \mathbb{C}$ のとき, $V = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{C}$ から 0 を除いた集合) とし, $x, y \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して「和」 $\tilde{+}$ と「スカラー倍」$\tilde{\cdot}$ を

$$\begin{aligned} x \tilde{+} y &= xy, \\ c \tilde{\cdot} x &= x \end{aligned}$$

によって定義すれば, この「和」と「スカラー倍」に関して (A), (S) は成立します. さらにゼロ元として $\mathbf{0} = 1$ をとれば, (VS1)〜(VS5), (VS7), (VS8) を満たしますが, (VS6) が満たされないので V はベクトル空間になりません.

ただ, V がもっと大きなベクトル空間 V' の部分集合で, 和とスカラー倍を V' のものと同じものと考えたときのみ, (A), (S) がそれぞれ部分空間の条件 (SS1), (SS2) と一致して, この 2 つだけで V がベクトル空間であることがいえるわけです. (だから, 演習 4.2 (1) の場合は例えば $K[x]$ がベクトル空間であるということを既知とした場合は (A), (S) だけでも OK ではあります.)