3 線形写像の像と核/線形結合と部分空間

演習 3.1 (教科書の問題 5.3+α) 次で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について, $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ とをそれぞれ求めよ. また, $\mathbb{R}^2$ を座標平面と同一視したときに, それらを例題 (黒板で説明します) にならって図示せよ.

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ (2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

演習 3.2 次の $\mathbb{C}^2$ の部分集合 W が部分空間になるかどうかを理由とともに述べよ.

(1) A をある 2×2 の複素行列, α をある複素定数とするときの

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}.$$

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x_1 = \bar{x}_2 \right\}$ ($\bar{x}_2$ は x_2 の共役複素数).

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x_1 = \sqrt{-1}x_2 \right\}$.

演習 3.3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

によって定める. このとき, 次のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ が $\mathrm{Im}\, f$ に入っているかどうかを判定せよ. また, もし入っている場合, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$ となるような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください (ここから下は追加点対象の問題).

演習 3.4 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. ある線形写像 $f : K^n \to K^m$ があって, $m \times n$ 行列 A によって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in K^n$) と表されているとき, 次を証明せよ (裏へ):

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n.$$

[ヒント] 実質的には「線形代数 I」の範囲に入る問題.