3　線形写像の像と核/線形結合と部分空間 の解答例

演習 3.1 (1) $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$

※ 図は黒板で説明します.

演習 3.2 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき, $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}$ だから,

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).$$

よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$. また,

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(c\boldsymbol{x})$$

より, $c\boldsymbol{x} \in W$. よって, W は部分空間.

※ $W \neq \{\mathbf{0}\}$ であれば, α は A の固有値です (W の $\mathbf{0}$ でない元が固有ベクトル). このとき, W は A の固有値 α に関する <u>固有空間</u> と呼ばれます.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, $\boldsymbol{x} \in W$ であるが, $\sqrt{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \notin W$ だから, W は部分空間でない.

※ この問題については意見が分かれると思っていました. ここではとりあえず複素数で考えているので, 上記のように W は $\mathbb{C}^2$ の部分空間ではありませんが, スカラー倍を実数に限れば $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$, $c\boldsymbol{x} \in W$ $(c \in \mathbb{R})$ となるので, 部分空間と考えたくなるのも分かります. 実は, この W は複素数体 $\mathbb{C}$ 上ではベクトル空間にはならないものの, 実数体 $\mathbb{R}$ 上ではベクトル空間になっているわけです. このように, 一般には「スカラーを複素数でとっているか実数でとっているか」ということによってベクトル空間の概念が異なってくるので注意してください. (そういうわけで, 両者を「複素ベクトル空間」「実ベクトル空間」といって区別することがあります.)

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ とする. $x_1 = \sqrt{-1}x_2$, $y_1 = \sqrt{-1}y_2$ だから, $(x_1 + y_1) = \sqrt{-1}(x_2 + y_2)$ で, よって, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in W$. また, $c \in \mathbb{C}$ に対し, $cx_1 = \sqrt{-1}cx_2$ となるから, $c\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} \in W$. 以上より, W は部分空間である.

演習 3.3 (1)

$$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \text{ある } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ があって } f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

だから, 次の連立 1 次方程式が解を持てば $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ で, そうでなければ $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Im} f$ である:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3. \end{cases}$$

これを解くと, 1, 2 行目を満たすには $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ でなければならないが, それでは 3 行目が満たされないから, 解はない. よって $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Im} f$.

(2) 上と同様に, 次の連立 1 次方程式を考える:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4. \end{cases}$$

これを解くと, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ という解をもつから, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ で, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすれば $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$.

(3) 上と同様に, 次の連立 1 次方程式を考える:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7. \end{cases}$$

これを解くと, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ という解をもつから, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ で, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすれば $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$.

演習 3.4 これは教科書の定理 2.17 のあたりを思い出しながら書いてもらえればよかったのですが, 授業で rank についてそれほど深くはやらなかったそうなので, ちょっと不適切な問題だったかもしれません. 下に証明の概略だけ書いておきます.

[証明] A に行基本変形をくりかえして階段行列 (教科書の §2.1 を参照) にしたものを $\widetilde{A}$ と書く. その段の数がちょうど $\operatorname{rank} A$ と一致する (A のみによって定まり, 行基本変形の進め方にはよらない). $\operatorname{rank} A$ は A の列の数を超えることはないので $\operatorname{rank} A \leq n$ である.

$\operatorname{rank} A = n$ のとき, 階段行列 $\widetilde{A}$ の段の数と列の個数が等しいので,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & \\ & 1 & * & * & \cdots \\ & & \ddots & * & \\ & O & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

という形になっているはず. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とするとき, 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解と $\widetilde{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は一致するが, $\widetilde{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を一番下の行から見ると, 解は $x_n = 0, x_{n-1} = 0, \ldots, x_1 = 0$ となって, 結局 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ただ一つであることが分かる. よって $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

$r = \operatorname{rank} A < n$ のとき, $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & * & \cdots \\ & O & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

という形をしているはず. このとき $\widetilde{A}\boldsymbol{x} = 0$ の解は $n - r$ 個の任意定数をもつ (教科書の §2.3 を参照) ので, 特に $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解が存在する. よってこのとき $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$.