2　線形写像と行列 (その 2)

演習 2.1 (1) 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ と写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

によって与えられていたとする. このとき, 合成写像 $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求めよ.

(2) f, g および $f \circ g$ が線形写像になることを確認し, それらを表示する行列を求めよ.

以下, K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする.

演習 2.2 (1) (教科書の問題 5.2) 写像 $f : K^m \to K^l$ と写像 $g : K^n \to K^m$ がともに線形写像であるとき, 合成写像 $f \circ g : K^n \to K^l$ も線形写像であることを示せ.

(2) 行列 A, B を用いて $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \in K^m$), $g(\boldsymbol{u}) = B\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} \in K^n$) と表せるとき, $f \circ g$ を表示する行列を求めよ (A, B を使って表せ).

※ 演習 2.2 (1) は線形写像の定義に沿って (つまり行列を使わないで) 証明してください.

演習 2.3 (1) $\mathrm{id} : K^n \to K^n$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ を恒等写像 (identity map) という. この id は線形写像で, 単位行列 E によって表示されることを確認せよ.

(2) $f : K^n \to K^n$ を線形写像とし, 正方行列 A を用いて $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \in K^n$) と表されているとする. このとき,

$$f \text{ が全単射} \Leftrightarrow A \text{ が正則行列}$$

を示せ.

(ヒント) (2) ($\Rightarrow$) もし f が全単射ならば逆写像 $f^{-1} : K^n \to K^n$ が存在する ($f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$). このとき f^{-1} も線形写像になることを示せ.

($\Leftarrow$) A が正則行列ならば逆行列 A^{-1} が存在するので $\cdots$

※ 今回は追加点対象の問題はありません.