

## 2 線形写像と行列 (その 2) の解答例

演習 2.1 (1)  $f \circ g$  は  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) \mapsto f(g(\mathbf{x}))$  という写像なので,

$$\begin{aligned} (f \circ g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= f \left( g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1 + 2x_2) - 3(3x_1 + x_2) \\ (x_1 + 2x_2) + (3x_1 + x_2) \\ -(x_1 + 2x_2) - (3x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_2 + x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$f \circ g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -7x_2 + x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(2) (それぞれ線形写像になることの確認作業については前回の問題と同様.)

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ (f \circ g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

演習 2.2 (1) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K^n$ ,  $c \in K$  に対し,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f(g(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = f(g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})) = f(g(\mathbf{u})) + f(g(\mathbf{v})) \\ &= (f \circ g)(\mathbf{u}) + (f \circ g)(\mathbf{v}), \\ (f \circ g)(c\mathbf{u}) &= f(g(c\mathbf{u})) = f(cg(\mathbf{u})) = cf(g(\mathbf{u})) \\ &= c(f \circ g)(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

よって,  $f \circ g$  も線形写像である.

(2) 任意の  $\mathbf{u} \in K^n$  に対し,

$$(f \circ g)(\mathbf{u}) = f(g(\mathbf{u})) = f(B\mathbf{u}) = A(B\mathbf{u}) = (AB)\mathbf{u}.$$

よって,  $f \circ g$  は行列  $AB$  によって表示される.

注意 1. (1) は「 $f$  と  $g$  が線形写像である」という前提条件のもと、それを用いて「 $f \circ g$  が線形写像である」( = 「 $f \circ g$  が線形写像の定義を満たす」 ) という結論を導き出す問題です。よく分からなかった人は、 $f$  と  $g$  が線形写像であるという ( 既知の ) 前提がどのように用いられているか、に注意して上の解答例を読むようにしてください。

注意 2. (1) で  $f \circ g$  が線形写像になることを示すのに

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = (f \circ g)(x_1) + \cdots + (f \circ g)(x_n)$$

または

$$f(g(\boldsymbol{x})) = f(g(x_1) + \cdots + g(x_n))$$

という式を書いている人がかなりいたのですが、これは意図がよく分かりませんでした。( そもそも  $x_1, \dots, x_n$  が何か、ということが説明されていなかったのですが、もし  $\boldsymbol{x}$  の成分ということなら、これらはスカラーなので、 $g(x_1)$  などの記号に意味がありません。 ) このような答えを書いた人は、おそらく線形写像の定義を間違っ ( あるいは曖昧に ) 理解していると思うので、正確に理解し直すようにしてください。

注意 3. (2) を演習 2.1 の例にあてはめてみて、 $f \circ g$  を表示する行列が

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

と、確かに行列の積になっていることを確認しておいてください。

演習 2.3 (1) 任意の  $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K^n, c \in K$  に対し、

$$\text{id}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \text{id}(\boldsymbol{u}) + \text{id}(\boldsymbol{v}),$$

$$\text{id}(c\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u} = c\text{id}(\boldsymbol{u}).$$

よって、 $\text{id}$  は線形写像である。また、 $\text{id}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} = E\boldsymbol{u}$  だから、 $\text{id}$  は確かに単位行列  $E$  で表示される。

(2) ( $\Rightarrow$ ) もし  $f$  が全単射ならば逆写像  $f^{-1} : K^n \rightarrow K^n$  が存在する。まず、この  $f^{-1}$  が線形写像になることを示したい。

$f$  の全単射性により、任意の  $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K^n$  に対して、ある  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$  が ( 一意的に ) 存在して  $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}$  となる。このとき逆写像の定義により  $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{y} = f^{-1}(\boldsymbol{v})$  であるから、

$$f^{-1}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f^{-1}(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = f^{-1}(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f^{-1}(\boldsymbol{u}) + f^{-1}(\boldsymbol{v}).$$

また、任意の  $c \in K$  に対し、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{u}) = f^{-1}(cf(\boldsymbol{x})) = f^{-1}(f(c\boldsymbol{x})) = c\boldsymbol{x} = cf^{-1}(\boldsymbol{u}).$$

よって,  $f^{-1}$  は線形写像である.

$f^{-1} : K^n \rightarrow K^n$  が線形写像であることが分かったので, ある  $n \times n$  行列  $B$  が存在して,  $f^{-1}(u) = Bu$  ( $\forall u \in K^n$ ) と書けることが分かる. すると, 演習 2.2 (2) および  $f \circ f^{-1} = \text{id}$  より,

$$(f \circ f^{-1})(u) = ABu = u \quad (\forall u \in K^n).$$

よって<sup>1</sup>,

$$AB = (ABe_1, ABe_2, \dots, ABe_n) = (e_1, \dots, e_n) = E.$$

同様に,  $f^{-1} \circ f = \text{id}$  より  $BA = E$  を得る. 従って,  $A, B$  は正則行列で,  $B$  は  $A$  の逆行列 ( $B = A^{-1}$ ) である. 以上で,  $f$  が全単射であるという前提のもと  $A$  が正則行列であるという結論が導かれたので,  $(\Rightarrow)$  の証明ができた.

( $\Leftarrow$ )  $A$  が正則行列ならば逆行列  $A^{-1}$  が存在する. そこで, 写像  $g : K^n \rightarrow K^n$  を  $g(u) = A^{-1}u$  ( $u \in K^n$ ) によって定義する. すると,  $f(g(u)) = AA^{-1}u = Eu = u$ ,  $g(f(u)) = A^{-1}Au = Eu = u$  により,  $f \circ g = g \circ f = \text{id}$  となることが分かる. よって,  $g$  は  $f$  の逆写像である ( $g = f^{-1}$ ). 以下,  $f$  の全単射性を示す<sup>2</sup>.

(単射性) 任意の  $x, y \in K^n$  について, もし  $f(x) = f(y)$  であったとすると, 両者に  $f^{-1}$  をかけても等しいから,  $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y))$ . よって,  $x = y$ .

(全射性) 任意の  $x \in K^n$  について,  $u = f^{-1}(x)$  とすれば,  $f(u) = x$  となる. よって,  $f$  は全射.

以上により,  $A$  が正則行列であるという前提のもと  $f$  が全単射であるという結論が導かれたので, ( $\Leftarrow$ ) の証明もできた.  $\square$

注意 4. (2) ( $\Rightarrow$ ) の証明で,  $f^{-1}$  が線形写像であることを示さずに, いきなり「 $f^{-1}(u) = Bu$  とおくと...」「 $f^{-1}$  を表示する行列を  $B$  とすると...」などと書いてしまっている人が非常に多かったのですが, それは  $f^{-1}$  が線形写像であることを証明した後ではじめて言えることなので注意してください.

<sup>1</sup>ここは単に, 「同じ線形写像を表示する行列なので  $AB = E$  である」としても良いです (教科書の定理 5.1 の「一意性」の部分). ただ, この解答例では, その証明も込めておきます.

<sup>2</sup>一般論として「逆写像が存在すれば全単射である」ということを知っていれば, ここで証明終としても良いですが, この解答例では全単射性の証明も込めておきます.