

## 1 線形写像と行列

演習 1.1 次で定義される写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  または  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が線形写像であるかどうかを判定せよ (なるべく判定理由も添えて).

$$(1) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \quad (2) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad (4) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (6) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

演習 1.2 上の演習 1.1 の写像それぞれに対して次を求めよ.

$$(a) f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b) f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c) f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (d) f \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

演習 1.3 演習 1.1 の写像のうち、線形写像になるものについて、それを表示する行列を求めよ.

時間が余ったら、次も考えてみてください (ここから下は追加点対象の問題).

演習 1.4 ある工場で、原料 A と原料 B から二種類の製品 X と Y を生産しているものとしよう. 製品 X を 1 グラム生産するのに原料 A が 3 グラムと原料 B が 2 グラム必要で、製品 Y を 1 グラム生産するのに原料 A が 1 グラムと原料 B が 3 グラム必要であるとする.

(1) 製品 X を 4 グラム、製品 Y を 2 グラム生産するために、原料 A, B がそれぞれ  $a, b$  グラム必要であったという. このとき  $a, b$  を求めよ.

(2) 製品 X, Y の生産量  $x, y$  (グラム) と、そのために必要な原料 A, B の投入量  $a, b$  (グラム) との関係を表す  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像を求めよ. つまり、 $a, b$  をそれぞれ  $x, y$  の関数として表して、

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

という写像を具体的に記述せよ.

(3) その写像が線形写像になるかどうかを判定せよ. また、もし線形写像ならばそれを表示する行列を求めよ.