

1 線形写像と行列 の解答例

演習 1.1 f が線形写像であかどうかを確かめるには, 線形写像の定義

$$\begin{cases} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) & (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2) \\ f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v}) & (\forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2) \end{cases}$$

を満たすかどうかを確認するのが最も直接的かつ厳密ですが, 間接的な方法としては, ある実数行列 A が存在して $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ($\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$) と書けるかどうか, などの判定基準もありえます. また, 「 f が線形写像でない」ということを示す際には, 上の定義を満たさないような反例を与えるのが最も確実です.

[答] (1), (4), (5) は上記のどちらかの方法で線形写像であることを示すことができる (確認作業は略). それ以外は, 例えば次のように反例があるので線形写像でないことが分かる.

$$(2) f \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(6) f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 2f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

注意 1. 間接的 (ないし直感的) な判定基準としては, 次のような理由を挙げている人が多かったです.

- $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ となる実数行列 A が具体的にとれるので, 線形写像である.
- f の行先の各成分が x_1, x_2 の 1 次斉次式になっているかどうか.
- (例えば (3) の場合) f は

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表わされるが, 行列の成分に変数 x_1 が混じっているため, 線形写像でない.

注意 2. 直感的な判断は、定義に基づいたものでなければ正確さを欠くことがあります。今回は (4) を「定数項を含むので線形写像ではない」としている人が何人かいたのですが、それは間違いなので、定義通り確かめておいてください。

演習 1.2 (1) (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

(2) (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

(4) (a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix}$

(6) (a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

f が線形写像ならば、

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立しており、線形写像でない場合は必ずしもこうはなっていないことを確認しておいてください。

演習 1.3 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

演習 1.4 (1) $a = 3 \times 4 + 1 \times 2 = 14$, $b = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$.

(2) $a = 3x + y$, $b = 2x + 3y$ なので、求める写像は

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

(3) f は線形写像で, 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書ける.

注意 3. 演習 1.4 (1) を間違えた人は,

$$\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ a + 3b = 2 \end{cases}$$

という方程式を立ててこれを解いている人が多かったです. これはもしかすると, 無意識に原料と生産物の質量を合わせようとした結果かもしれません (ある意味では正常な感覚です). ただ, 今回の場合は, X, Y を生産する際にけっこう副産物が出ていると考えてもらったほうが良かったです. (問題作成時にはそこまで考えていなかったというのが本当のところですが ….)