10 リーマン積分可能性 (その 2)

演習 10.1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数または } x = 0) \\ \dfrac{1}{q} & \left(x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で, 既約分数で表したときに } x = \dfrac{p}{q} \text{ (ただし } q > 0)\right) \end{cases}$$

により定める. このとき, f は有界閉区間 $[0,1]$ でリーマン積分可能であり, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ となることを示せ.

※裏面にヒントを小出しに書いておくので, つまったら適宜参照してください. ((ヒント 1) から (ヒント 5) まで段階的に書いてあるので, 例えば, まず (ヒント 1) だけ見て考えて, 分からなかったらさらに (ヒント 2) をみて ⋯ , という風に使ってください.)

(ヒント 1) $\mathit{\Delta}$ を $[0,1]$ の分割とすると, $\underline{S}(\mathit{\Delta})=0$ であることが無理数の稠密性により分かる. だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\overline{S}(\mathit{\Delta})<\varepsilon$ となる分割 $\mathit{\Delta}$ が存在することを示せばよい.

(ヒント 2) $\mathit{\Delta}$ を $[0,1]$ を N 等分する分割, n を自然数とする. もし仮にすべての $x\in[0,1]$ に対して $f(x)\leq 1/n$ となるなら,

$$\overline{S}(\Delta)\leq(\frac{1}{n}\times N)\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{n}$$

である. もちろん $n>1$ なら実際にはそうはならないが, ただ, $f(x)>1/n$ となる x は $[0,1]$ の中には有限個しかない (ただし個数は n に依存する) ことが示せるので, それを使って, 上の式を実際に成り立つように改良することができる.

(ヒント 3) $[0,1]$ に属する既約分数 p/q $(q>0)$ のうち $q<n$ を満たすものの個数は, 集合 $\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid p\leq q<n\}$ の元の個数以下になる.

(ヒント 4) 集合 $\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid p\leq q<n\}$ の元の個数を $M(n)$ とする. (ヒント 2) の式を改良すれば, 実際に成り立つ次の式

$$\overline{S}(\Delta)\leq(1\times M(n)+\frac{1}{n}\times N)\cdot\frac{1}{N}=\frac{M(n)}{N}+\frac{1}{n}$$

を得られる. $M(n)$ を具体的に求めて, ε に対して適切な n,N を定めてください.

(ヒント 5)

$$\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid p\leq q<n\}=\bigcup_{q=1}^{n-1}\{(p,q)\mid p=1,\ldots,q\}.$$