10　リーマン積分可能性（その２）の解答例

演習 10.1

$$\varDelta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$$

を $[0,1]$ の任意の分割とし, $M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ とおく. 無理数の稠密性により, 各 $i = 1, \dots, N$ に対し $[x_{i-1}, x_i]$ は少なくとも 1 つの無理数を含むので, $m_i = 0$ であることが分かる. よって,

$$\underline{S}(\varDelta) = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\overline{S}(\varDelta) = \sum_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

となるような $[0,1]$ の分割 $\varDelta$ が存在することを示せば, $f(x)$ が $[0,1]$ でリーマン積分可能で, しかも $\int_0^1 f(x)dx = 0$ となることが証明できる.

さて, n, N を自然数とし, $\varDelta$ を $[0,1]$ を N 等分する分割とする. つまり上記の記号でいうと $x_i = i/N$ とする. $i = 1, \dots, N$ のうち, $1/n < M_i$ (≤ 1) となるような i の個数を $a(n,N)$ とすれば, 残りの $N - a(n,N)$ 個の i については $M_i \le 1/n$ なので,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\varDelta) &\le \frac{1}{N}\left(1 \times a(n,N) + \frac{1}{n} \times (N - a(n,N))\right) \\
&\le \frac{1}{N}\left(a(n,N) + \frac{N}{n}\right) \\
&= \frac{a(n,N)}{N} + \frac{1}{n} \qquad (10.1)
\end{aligned}$$

となる.

さて, ここで $1/n < f(x)$ を満たす $x \in [0,1]$ の個数, 言い換えれば, $[0,1]$ に属する既約分数 p/q $(q > 0)$ のうち $q < n$ を満たすものの個数を考えてみる. $p/q \le 1$ かつ $q < n$ であるためには (p,q) が集合 $T = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p \le q < n\}$ に入っていなければならないから, T の元の個数 (これを $M(n)$ とする) 以下になる. $M(n)$ を具体的に求めてみると,

$$T = \{(1,1)\} \cup \{(1,2),(2,2)\} \cup \cdots \cup \{(1,n-1),(2,n-1),\dots,(n-1,n-1)\}$$

だから,

$$M(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

となる.

すると上記の $a(n,N)$ は $M(n)$ 以下になるはずだから, 式 (10.1) より,

$$\begin{aligned}\overline{S}(\mathit{\Delta}) &\leq \frac{M(n)}{N} + \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)}{2N} + \frac{1}{n} \\ &< \frac{n^2}{2N} + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

そこで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n > \dfrac{3}{2\varepsilon}$ となる自然数 n をとり, $N = n^3$ とし, $\mathit{\Delta}$ を $[0,1]$ を N 等分する分割とすれば,

$$\overline{S}(\mathit{\Delta}) < \frac{n^2}{2N} + \frac{1}{n} = \frac{3}{2n} < \varepsilon$$

を得る.

注意. 今回は完全に正解している人はいませんでした. どの人も次のいずれかにあてはまるので, 自分がどの点で間違えたのか確認しておいてください:

- $f(x)$ の定義を勘違いしている (例えば, q を定数だと思っている) など, 問題文を読み違えている.
- $\overline{S}(\Delta)$ を上から押さえる不等式の計算をミスしている.
- $M(n)$ が計算できなかった.
- 最後の n, N のとり方が分からなかった, あるいは不完全なとり方をしている.

４つめに当てはまる人のうち, n, N を不完全にとっている人は, "$a > b \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$" が成り立つのは a, b が共に正の数であるか共に負の数であるかのどちらかのときのみである (a, b の正負が異なるときは成立しない) ことに注意してください.

しかし, 点数的には, ある程度取り組んでいれば 4 点にしてあります (今回は難しかったので).