9 リーマン積分可能性

演習 9.1 関数 f が有界閉区間 $[a,b]$ において単調増大であればリーマン積分可能であることを証明せよ.

(ヒント) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 区間 $[a,b]$ のある分割

$$\Delta : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

が存在して

$$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

(ただし, $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$) となることを示せばよい (教科書の定理 9.1 を参照). 今回の場合, f が単調増大なので $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ である. ε に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ をどれくらい小さくとれば良いか？

演習 9.2 関数 f が有界閉区間 $[a,b]$ において有界で, ある 1 点 $c \in [a,b]$ を除いて連続ならば, f は $[a,b]$ でリーマン積分可能であることを証明せよ.

※ 今回は特別扱いの問題はありません.