9 リーマン積分可能性 の解答例

演習 9.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 区間 $[a, b]$ の分割

$$\varDelta : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

を $|\Delta| = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ となるようにとる. $M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ とすると, f は単調増大なので $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ である. よって,

$$\begin{aligned} \overline{S}(\varDelta) - \underline{S}(\varDelta) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))|\Delta| = (f(b) - f(a))|\Delta| < \varepsilon. \end{aligned}$$

従って $\inf_{\varDelta}(\overline{S}(\varDelta) - \underline{S}(\varDelta)) = 0$ となり, f は $[a, b]$ においてリーマン積分可能である.

演習 9.2 $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ とする. もし $M = m$ ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ において定数関数なので, 明らかにリーマン積分可能である. 以下, $M > m$ とする.

まず, $a < c < b$ の場合について証明する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$0 < \delta' < \min\left\{\frac{\varepsilon}{4(M - m)},\ c - a,\ b - c\right\}$$

となる正の数 δ' をとる. f は閉区間 $[a, c - \delta']$, $[c + \delta', b]$ において一様連続だから, ある δ_1, δ_2 が存在して,

$$\begin{aligned} &{}^\forall x, y \in [a, c - \delta'], \quad |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a - 2\delta')}, \\ &{}^\forall x, y \in [c + \delta', b], \quad |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a - 2\delta')} \end{aligned}$$

を満たす ($b - a - 2\delta' > b - a - (c - a) - (b - c) = 0$ に注意[1]). そこで, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とし, $[a, b]$ の分割 $\varDelta$ を,

$$\varDelta : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{l-1} = c - \delta' < x_l = c + \delta' < \cdots < x_n = b$$

[1]分母は単に $b - a$ でも良いので, その場合はこの注意は不要です.

かつ $|\mathit{\Delta}| < \delta$ となるようにとる. 仮定より $f(x)$ は有界閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n,$ ただし $i \neq l)$ において最大値, 最小値をとるから,

$$f(\xi_i) = M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad f(\eta_i) = m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

を満たす $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n,$ ただし $i \neq l)$ が存在し, $|\xi_i - \eta_i| \leq |\mathit{\Delta}| < \delta$ である. 従って,

$$\begin{aligned}
& \overline{S}(\mathit{\Delta}) - \underline{S}(\mathit{\Delta}) \\
= \ & \sum_{i=1}^{l-1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (M_l - m_l)(x_l - x_{l-1}) + \sum_{i=l+1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
= \ & \sum_{i=1}^{l-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) + (M_l - m_l)(2\delta') + \sum_{i=l+1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) \\
< \ & \underbrace{\sum_{i=1}^{l-1} \frac{\varepsilon}{2(b - a - 2\delta')}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b - a - 2\delta')}(x_i - x_{i-1})}_{\frac{\varepsilon}{2}} + (M - m)(2\delta') \\
< \ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって, f は $[a, b]$ でリーマン積分可能である.

$a = c$ の場合は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $0 < \delta' < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4(M - m)},\ b - a\right\}$ となる正の数 δ' をとる. f は閉区間 $[a + \delta', b]$ において一様連続だから, ある δ が存在して,

$$^\forall x, y \in [a + \delta', b], \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a - \delta')}$$

を満たす. そして $[a, b]$ の分割 $\mathit{\Delta}$ を,

$$\mathit{\Delta}: \qquad a = x_0 < x_1 = a + \delta' < \cdots < x_n = b$$

かつ $|\mathit{\Delta}| < \delta$ となるようにとればよい. $c = b$ の場合も同様にして証明することができる.