

8 一様連続性

演習 8.1 (1) $\forall x, y \in [0, \infty)$ に対して $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ が成り立つことを示せ.
(2) 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は区間 $[0, \infty)$ で一様連続であることを証明せよ.

(ヒント) (1) $x = y$ のときは明らか. x, y の対称性により $x > y$ のときに示せば十分である. また, 一般に a, b が非負の実数のとき, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ となることに注意.

演習 8.2 関数 $f(x) = e^x$ は \mathbb{R} 全体では一様連続でないことを証明せよ.

(ヒント) 黒板で例題をやるのでそれを参考にしてください.

時間が余ったら, 次の問題も考えてみてください.

演習 8.3 $f(x)$ を \mathbb{R} で連続な関数とする. このとき, もし

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

ならば, f は \mathbb{R} で一様連続であることを示せ.

教科書の定理 8.4 (ある有界閉区間 $[a, b]$ で連続な関数は $[a, b]$ で一様連続でもある) は使ってかまいません.