

## 8 一様連続性

演習 8.1 (1)  $\forall x, y \in [0, \infty)$  に対して  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$  が成り立つことを示せ.  
(2) 関数  $f(x) = \sqrt{x}$  は区間  $[0, \infty)$  で一様連続であることを証明せよ.

(ヒント) (1)  $x = y$  のときは明らか.  $x, y$  の対称性により  $x > y$  のときに示せば十分である. また, 一般に  $a, b$  が非負の実数のとき,  $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$  となることに注意.

演習 8.2 関数  $f(x) = e^x$  は  $\mathbb{R}$  全体では一様連続でないことを証明せよ.

(ヒント) 黒板で例題をやるのでそれを参考にしてください.

---

時間が余ったら, 次の問題も考えてみてください.

演習 8.3  $f(x)$  を  $\mathbb{R}$  で連続な関数とする. このとき, もし

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

ならば,  $f$  は  $\mathbb{R}$  で一様連続であることを示せ.

教科書の定理 8.4 (ある有界閉区間  $[a, b]$  で連続な関数は  $[a, b]$  で一様連続でもある) は使ってかまいません.