8 一様連続性 の解答例

演習 8.1 (1) $x=y$ のときは明らか. x,y の対称性により $x>y\geq 0$ のときに示せば十分である. このとき $\sqrt{x}-\sqrt{y}>0$, $x-y>0$ だから,

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|} &\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}\\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}\leq x-y\\
&\Leftrightarrow y\leq\sqrt{xy}\Leftrightarrow y^2\leq xy \quad (\Leftarrow 0\leq y<x).
\end{aligned}
$$

よって ${}^\forall x,y\in[0,\infty)$ に対して $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$ は成立する.

(2) ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し, $\delta=\varepsilon^2$ とすれば, (1) より, ${}^\forall x,y\in[0,\infty)$ に対して

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}<\sqrt{\delta}=\varepsilon.$$

よって, $f(x)=\sqrt{x}$ は $[0,\infty)$ で一様連続である.

注意 1. 細かい点ですが, 演習 8.1 (1) の証明で, $0\leq y<x$ のとき $y=0$ の可能性もあるので, $y^2\leq xy$ のイコールは外せません.

演習 8.2 ある $\varepsilon>0$ が存在して, どんなに小さい $\delta>0$ をとっても $|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$ となる $x,y\in\mathbb{R}$ が存在してしまうことを示せばよい.

例えば $\varepsilon=1$ とする. ${}^\forall\delta>0$ に対し, $x\in\mathbb{R}$ を $x>-\log(e^{\frac{\delta}{2}}-1)$ となるようにとる. すると $e^x>\dfrac{1}{e^{\frac{\delta}{2}}-1}$ だから, $y=x+\dfrac{\delta}{2}$ とすれば, $|x-y|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$ かつ

$$|f(x)-f(y)|=|e^x-e^y|=e^x(e^{\frac{\delta}{2}}-1)>1=\varepsilon.$$

よって, $f(x)=e^x$ は $\mathbb{R}$ では一様連続ではない.

演習 8.3 任意に $\varepsilon>0$ をとる. 仮定より, この ε に対してある $K>0$ が存在して

$${}^\forall x\in\mathbb{R},\quad |x|>K\Rightarrow|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

となる. また (教科書の定理 8.4 より) $f(x)$ は有界閉区間 $[-K-1,K+1]$ で一様連続だから, ある $\delta>0$ が存在して

$${}^\forall x,y\in[-K-1,K+1],\quad |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

この δ は 1 より小さいとしてよい. 後は x または y が $[-K-1, K+1]$ に入っていないときにも $|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となることを示せばよい. もし $|x|>K+1$ かつ $|x-y|<\delta\ (<1)$ ならば, $|y|\geq|x|-|x-y|>K+1-\delta>K$ だから,

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$|y|>K+1$ かつ $|x-y|<\delta$ のときも同様に $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となる. よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で一様連続である.

注意 2. 演習 8.3 に関して, 次の 2 つの命題の区別に注意してください:

(a) f は $\mathbb{R}$ で一様連続である.

(b) f は $[0,\infty)$ で一様連続, かつ, f は $(-\infty,0]$ で一様連続.

今回, (b) を証明して終わりにしている答案が多かったのですが, その場合これらは一応別々の命題なので, (b) $\Rightarrow$ (a) をちゃんと示す必要があります. ((a) と (b) が同値であることを証明することはできるので, 考えてみてください.)

なお, 一般に, (a), (b) は次の (c) とは同値になりません:

(c) f は $[0,\infty)$ で一様連続, かつ, f は開区間 $(-\infty,0)$ で一様連続.

例えば, f を

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

により定めると, これは (c) を満たしますが, (a) や (b) は満たしません. このような例を考えれば, (b) $\Rightarrow$ (a) がそれほど明らかではないことが分かると思います.