

7 連続関数とその性質

ペース的には講義からワンテンポ遅れていますが, 今回は連続関数の定義や中間値の定理に関して, 次回は一様連続性をテーマにして問題演習を行います.

演習 7.1 $f(x), g(x)$ が \mathbb{R} で連続な関数であるとき, 合成関数 $f(g(x))$ も \mathbb{R} で連続になることを示せ.

演習 7.2 $f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする. $f(a) > g(a)$ かつ $f(b) < g(b)$ のとき, ある $c \in [a, b]$ が存在して $f(c) = g(c)$ となることを証明せよ.

(ヒント) 中間値の定理をうまく使いましょう.

時間が余ったら, 次の問題も考えてみてください.

演習 7.3 \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数のとき}) \\ x & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

により定める. このとき, $f(x)$ は 0 においてのみ連続で, それ以外のところではすべて不連続であることを示せ.

(ヒント) 以前お話した「有理数の稠密性」を思い出して.