7 連続関数とその性質 の解答例

演習 7.1 まず, f の連続性により, ${}^\forall a \in \mathbb{R}$, ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta' > 0$ が存在して, ${}^\forall x' \in \mathbb{R}$, $|x' - g(a)| < \delta' \Rightarrow |f(x') - f(g(a))| < \varepsilon$ が成り立つ. さらに, g の連続性により, 上記の δ' に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, ${}^\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \delta'$ ($\Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$) が成り立つ. 以上をまとめると, ${}^\forall a \in \mathbb{R}$, ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, ${}^\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$ となるので, 合成関数 $f(g(x))$ の連続性がいえた.

演習 7.2 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, この $h(x)$ も $[a, b]$ で連続な関数となる[1]. 仮定より $h(a) > 0$ かつ $h(b) < 0$ だから, 中間値の定理によりある $c \in [a, b]$ が存在して $h(c) = 0$, 従って $f(c) = g(c)$ となる.

演習 7.3 (0 において連続であること.) 定義により $f(0) = 0$ である. ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とすれば, ${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x)| = \begin{cases} 0 < \varepsilon & (x \text{ が有理数のとき}) \\ |x| < \delta = \varepsilon & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

となるから, $f(x)$ は 0 で連続である.

(それ以外ではすべて不連続であること.) a を 0 でない任意の実数とする. 「$f(x)$ が a で連続である」という命題の否定命題は,

$${}^\exists \varepsilon > 0 \ \text{ s.t. } \ {}^\forall \delta > 0, \ \ {}^\exists x \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ |x - a| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

となるのでこれを示す. $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ とし, 任意の $\delta > 0$ に対して $\delta' = \mathrm{Min}\{\delta, \varepsilon\}$ とおく. a が有理数のとき, 無理数の稠密性 (演習 5.3 (2)) により $a - \delta' < x < a + \delta'$ となる無理数 x が存在する. このとき $|x - a| < \delta' \leq \delta$ となる. さらに a が負の数のとき, $x < a + \delta' \leq a + \varepsilon = -\varepsilon < 0$ より $|x| > |a + \delta'| \geq \varepsilon$ となり, a が正の数のときは $x > a - \delta' \geq a - \varepsilon = \varepsilon > 0$ より $|x| > |a - \delta'| \geq \varepsilon$ となるので, いずれにせよ

$$|f(x) - f(a)| = |x| > \varepsilon$$

が成立する. a が無理数のときは, 有理数の稠密性 (演習 5.3 (1)) により $a - \delta < x < a + \delta$ となる有理数 x が存在して, $|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| = |a| > \varepsilon$ となる. 以上より, $f(x)$ は a で連続でないことがいえた.

[1] h の連続性の証明はここでは省略していますが, きちんと示してくれている人もいました. ちなみに, ε-δ 論法で直接証明する他に, 教科書の定理 7.5 を使うという手もあります.