6 上限・下限, 最大値・最小値, それから上極限・下極限の解答例

演習 6.1 次のように, 条件を満たす例ならば何でも正解です ($A \cap B = \emptyset$ という条件を忘れずに).

- $A = [0,1]$, $B = [-2,-1] \cup [2,3]$
- $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1,\ a$ は有理数$\}$, $B = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 2,\ a$ は無理数$\}$

等々

演習 6.2 やはり条件を満たしていれば良いわけですが, $A \cap B = \emptyset$ という条件を満たしながら, となると上の問題より思いつきにくかったかもしれませんね.

- $A = \{0,1\}$ (0 と 1 だけからなる集合), $B = (0,1)$ (開区間)
- $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1,\ a$ は有理数$\}$, $B = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1,\ a$ は無理数$\}$

等々

演習 6.3 (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ より, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1$. (教科書の 7.3.1 (4) を参照.)

(2) $A_k = \left\{ a_n = (-1)^{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \geq k \right\}$ とおくと, $\sup A_k = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ である (なぜなら, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n \geq k$ かつ $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる奇数 n をとれば, $1 - \varepsilon < a_n = 1 - \dfrac{1}{n} \leq 1$). よって,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad (= \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup A_k) = \lim_{k\to\infty} \sup A_k = 1.$$

また, $\inf A_k = -1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ である (任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n \geq k$ かつ $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる偶数 n をとれば, $-1 \leq a_n = -1 + \dfrac{1}{n} < -1 + \varepsilon$) から,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad (= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf A_k) = \lim_{k\to\infty} \inf A_k = -1$$

を得る.

注意. 演習 6.3 (1) で, $A_k = \{a_n \mid n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$ としたとき, 数列 $\{a_n\}$ の上極限, 下極限として $\sup A_1 = \dfrac{3}{2}$ と $\inf A_1 = 0$ を答えてしまっている人が結構多かったです. 実際には,

$$\sup A_k = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{k+1} & (k \text{ が奇数のとき}) \\ 1 + \dfrac{1}{k} & (k \text{ が偶数のとき}), \end{cases} \qquad \inf A_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{k} & (k \text{ が奇数のとき}) \\ 1 - \dfrac{1}{k+1} & (k \text{ が偶数のとき}), \end{cases}$$

なので,

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup A_k = 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf A_k = 1$$

となるわけです.

演習 6.4 $A_k = \left\{ a_n = \sin \dfrac{n\pi}{3} \;\middle|\; n \geq k \right\}$ とおくと, $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し, $A_k = \left\{ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ だから, $\sup A_k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\inf A_k = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. よって,

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup A_k = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf A_k = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$