5　コーシー列／有理数の稠密性

演習 5.1 (1) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ とすると, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列になることを示せ.

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とすると, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列にならないことを示せ.

(ヒント) (1) $\dfrac{1}{m^2} < \dfrac{1}{m(m-1)} = \dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}$ ($m \geq 2$ のとき).

演習 5.2 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = \log n$ とする. 次を証明せよ.
(1) ${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. “$n \geq N \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$”.
(2) しかし数列 $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

※ $f(t) = e^t$ が単調増加関数であることは使ってかまいません (とくに, $x > 0$ のとき $\log x < \alpha \Leftrightarrow x < e^\alpha$).

※時間が余ったら, 次の問題も考えてみてください.

演習 5.3 $a < b$ となる任意の実数 a, b について, 次が成立することを示せ.
(1) ある有理数 x が存在して $a < x < b$ となる. (これを有理数の稠密性という.)
(2) ある無理数 y が存在して $a < y < b$ となる.

(ヒント) (1) 自然数 n を十分大きくとれば na と nb との間隔を広くして整数を少なくとも一つ挟むようにすることができる. n はどれくらい大きければ良いか？

(2) 無理数 (例えば $\sqrt{2}$) の分だけ平行移動させて (1) を使う. ($\sqrt{2}$ が無理数であることなどは使ってかまいません.)